coef.

base de funciones.

Problema 2 (30 pt.)

Se considera el modelo lineal $y(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i\phi_i(t)$ donde ϕ_i son funciones dadas linealmente independientes y a_i son los parámetros del modelo. Se tienen además n datos experimentales $\{(t_k, y_k), k = 1, ..., n\}$, con $m \ll n$.

$n = m \rightarrow$ int.

$n > m$ m.m.c.

a) Escriba el problema de mínimos cuadrados lineal (PMCL) asociado, la matriz A y los vectores x y b del mismo, explicando cómo llega a ellos.

b) Deduzca las *Ecuaciones Normales* y demuestre que las soluciones de las mismas son solución del PMCL.

c) Se tienen los 4 datos experimentales $\{(-1, 1.4), (0, 0.2), (1.3, 0.5), (1.9, 2.4)\}$ y el modelo $y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Plantee el PMCL mostrando quiénes son A, b, resuelva el mismo y halle a_0, a_1, a_2. Escriba sus valores con 3 decimales.

a) $\left\| \sum_{i=1}^{m} a_i \phi_i \right\|_2 \longrightarrow$ esta es la cantidad que se quiere minimizar.

$\Updownarrow$ funciones dadas.

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\underbrace{y_k}_{y(t_k)} - \sum_{i=1}^{m} a_i \phi_i(t_k) \Big)^2$$

¿respecto a quién?

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{Ax=b} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 - \sum a_i \underbrace{\phi_i(t_1)}_{A_{i1}} \\ \vdots \\ y_n - \sum a_i \underbrace{\phi_i(t_n)}_{A_{in}} \end{pmatrix} \qquad \sum_k \Big(y_k - \sum a_i \phi_i(t_k) \Big)^2$$

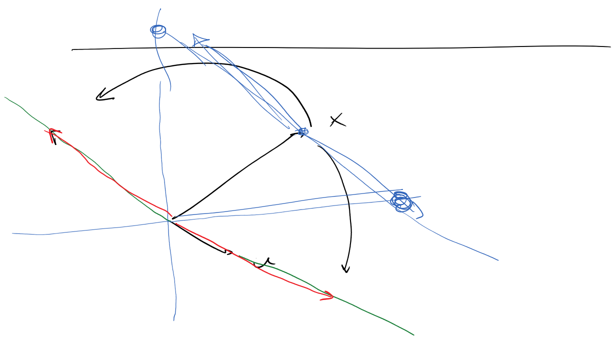
b) $\nabla f = 0$

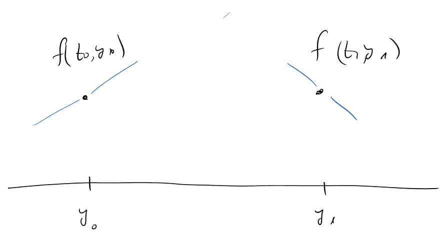
$$\Rightarrow \sum 2 \Big(y_k - \sum \underbrace{a_i}_{(x)_i} \underbrace{\phi_i(t_k)}_{= (A)_{ik}} \Big) \cdot \underbrace{\phi_i(t_k)}_{(A^t)_{ki}} = 0 \qquad \forall\, i$$

$\boxed{Ax = b} \longrightarrow$ ecuación pre-eq. normales.

$$\boxed{A^t A x = A^t b}$$

ec. normales.





$$\boxed{y'(t_1) = \frac{y_1 - y_0}{h}}$$

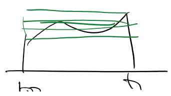
$$y'(t_1) = y'(t_0) + \overbrace{h \cdot y''(t_0) + \cdots}^{\to 0}$$

$$y_1 = h f(t_0, y_0) + y_0.$$

$$f(t_1, y_1) = y'(t_1) = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

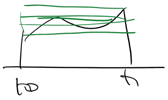
$$\frac{f(t_0, y_0) + f(t_1, y_1)}{2} = \frac{y'(t_1) + y'(t_0)}{2} = \frac{y_1 - y_0}{h} \Rightarrow \boxed{y_1 = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + y_0}$$

$$y_1 = y_0 + \int^{t_1} y'(t)\, dt$$

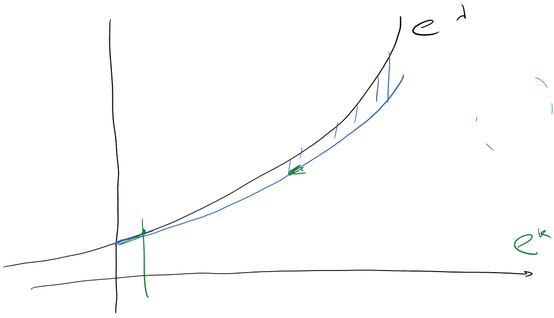


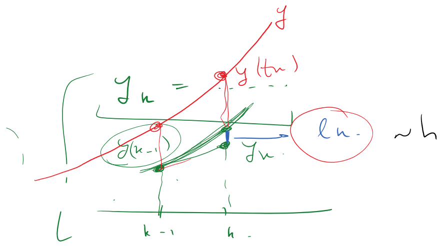
$$y_1 = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} y'(t)\,dt$$

$$= y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t))\,dt \cong \left(\frac{f(t_1, y_1) + f(t_0, y_0)}{2}\right) h.$$



$y_k = y_{k-1} + \ldots$





$e^k \to y(t_k) - y(t_k)$

$\boldsymbol{\ell}_k := \mathbf{y}_k - \mathbf{u}(t_k),$

donde $\mathbf{u}$ es la solución del problema de valores iniciales

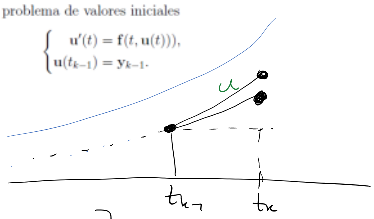
$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)), \\ \mathbf{u}(t_{k-1}) = \mathbf{y}_{k-1}. \end{cases}$$

M. Euler hacia delante.

$$y_k = y_{k-1} + h\, f(t_{k-1}, y_{k-1})$$

¿ $\|$?

$y(t_k)$



$$y(t_k) - y_k = y(t_k) - \left[y_{k-1} + h\, f(t_{k-1}, y_{k-1})\right]$$

$$= \boxed{y(t_{k-1})} + y'(t_{k-1})\, h + O(h^2) - \left[\boxed{y_{k-1}} + h\, f(t_{k-1}, y_{k-1})\right]$$

$$= h\left(y'(t_{k-1}) - f(t_{k-1}, y_{k-1})\right) + O(h^2)$$

$$= h\left(f(t_{k-1}, \overbrace{y(t_{k-1})}^{y_{k-1}}) - f(t_{k-1}, y_{k-1})\right) + O(h^2).$$

$$\ell_k \sim O(h^2)$$

Método de Euler hacia delante.

$$y_k = y_{k-1} + h\, f(t_k, y_k)$$

Usamos el desarrollo de Taylor hacia atrás: $y(t_{k-1}) = y(t_k) - h\, y'(t_k) + O(h^2)$

$$\Rightarrow y(t_k) = y(t_{k-1}) + h\, y'(t_k) + O(h^2)$$

$$y(t_k) - y_k = \overbrace{y(t_k)} - \left[y_{k-1} + \overbrace{h\, f(t_k, y_k)}\right]$$

$$= \boxed{y(t_{k-1})} + h\, y'(t_k) + O(h^2) - \left[\boxed{y_{k-1}} + h\, f(t_k, y_k)\right]$$

$$= h\left(y'(t_k) - f(t_k, y_k)\right) + O(h^2)$$

$$= h\left(f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k)\right) + O(h^2)$$

$$< L \cdot C\, |y(t_k) - y_k| + O(h^2)$$

$$\leq h \cdot C \; |y(t_k) - y_k| + O(h^2)$$

$$= hC \cdot |e_k| + O(h^2)$$

$$\Rightarrow |e_k| \leq hC(e_k) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow |e_k| \leq \frac{O(h^2)}{1 - hC}$$

Como $h \to 0$, entonces podemos tomar $h << \frac{1}{2}$.

$$|e_k| \leq O(h^2)$$