Resolución del examen Diciembre 2021

Ejercicio 1) (40 pt.) Deseamos resolver la ecuación $f(x) = 0$, con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Para ello reescribimos dicha ecuación como $x = g(x)$ (esto es, $f(x^*) = 0$ sii $x^* = g(x^*)$, o sea si x^* es un *Punto Fijo* de g) y generamos la sucesión

$$x_{n+1} = g(x_n) \tag{1}$$

partiendo de x_0 en un entorno I de x^*.

a) Demuestre que si g es contractiva, p veces derivable y la derivada p-sima es la primera que no se anula en el punto fijo x^*, entonces la iteración (1) converge a x^* con orden de convergencia p y velocidad de convergencia $\dfrac{|g^{(p)}(x^*)|}{p!}$.

Ver teórico.

b) Demuestre que si g es derivable en I, $x^* \in I$ punto fijo de g y además $|g'(x)| \leq m < 1$ en I, entonces $\{x_n\}$ converge a x^* y además $x_{n+1} - x^* \approx g'(x^*)(x_n - x^*)$

Demostración: Supongamos que $x_n \in I$. Sabemos que $g(x^*) = x^*$ y por tanto $x_{n+1} - x^* = g(x_n) - g(x^*)$. Por el teorema del valor medio de Lagrange, existe ε_n entre x_n y x^* tal que $\dfrac{g(x_n) - g(x^*)}{x_n - x^*} = g'(\varepsilon_n)$ y por tanto

$$x_{n+1} - x^* = g'(\varepsilon_n)(x_n - x^*) \tag{2}$$

Como $x_n \in I$ y $x^* \in I$, por hipótesis $|x_{n+1} - x^*| \leq m|x_n - x^*| < |x_n - x^*|$ y por tanto $x_{n+1} \in I$. Iterando, tenemos $|x_n - x^*| < m^n|x_0 - x^*|$, y como $m^n \to 0$ cuando $n \to +\infty$ tenemos que $\{x_n\} \to x^*$ cuando $n \to +\infty$.

Además $\{\varepsilon_n\} \to x^*$, por tanto por (2) tenemos

$$x_{n+1} - x^* \approx g'(x^*)(x_n - x^*) \tag{3}$$

para n suficientemente grande. Esto muestra que si $g'(x^*) \neq 0$ el error $e_{n+1} = x_{n+1} - x^*$ es proporcional al error e_n en el iterado anterior x_n.

Como la constante de proporcionalidad es $g'(x^*)$, la tasa de convergencia dependerá de $|g'(x^*)|$ y mientras más chica sea, mas rápida será dicha convergencia.

c) Considere la ecuación

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \tag{4}$$

Tres formas posibles de reescritura son

c.1) $x = \sqrt{2x+8}$

c.2) $x = \dfrac{x^2-8}{2}$

c.3) $x = \dfrac{2x+8}{x}$

Deseamos calcular la raíz de (4) con mayor valor absoluto. Cual (o cuales) reescrituras generan una sucesión convergente? Justifique.

Resolución: La ecuación (4) tiene raíces -2 y 4, por lo que $x^* = 4$. Apoyándonos en lo anterior veremos donde $|g'(x)| \leq m < 1$ para los tres casos.

c.1) Tenemos $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+8}}$, y se cumple $|g'| < 1$ si $-7/2 < x$.
Además g' es decreciente, y si tomamos $I = [0, b]$ que contenga a $x^* = 4$ y a x_0, el máximo valor de g' se alcanza en $x = 0$ y es $g'(0) = 0.354$.
Tomando $m = 0.354$ tenemos que la reescritura c.1 genera una sucesión que convergerá a $x^* = 4$ si partimos de $x_0 \in I$.
Además el que $g' > 0$ implica que los errores en dos iteraciones consecutivas tendrán el mismo signo por lo que la convergencia será monótona.
Como $|g'(4)| = 1/4$, los errores a la larga se reducen por un factor $1/4$ en cada iteración, el error en un paso n es la cuarta parte del error en el paso $n-1$ cuando n es suficientemente grande.

c2) Tenemos $g'(x) = x$ y por tanto $|g'| > 1$ cuando $x > 1$. Como $x^* > 1$, no podemos asegurar que la sucesión asociada sea convergente.
Como $|g'(4)| = 4 > 1$, tomando $x_0 > x^*$, de la ecuación (2) tenemos $x_1 - x^* = g'(\varepsilon_0)(x_0 - x^*) \geq 4(x_0 - x^*)$.
De modo similar, $x_2 - x^* = g'(\varepsilon_1)(x_1 - x^*) \geq 4(x_1 - x^*) \geq 4^2(x_0 - x^*)$. Iterando tenemos $x_n - x^* \geq 4^n(x_0 - x^*)$ por lo que la sucesión asociada a esta reescritura es divergente.

c.3) Tenemos $g'(x) = \dfrac{-8}{x^2}$ y que $|g'| < 1$ cuando $\sqrt{8} = 2.828 < x$.
En este caso g' crece a cero y si tomamos p.ej. $I = [3, c]$ que contenga a $x^* = 4$ y a x_0 la reescritura c.3 genera una sucesión que convergerá a $x^* = 4$ si partimos de $x_0 \in I$.
Como $g' < 0$ los errores en dos iteraciones consecutivas tendrán signos opuestos y por tanto la convergencia será oscilatoria.
Como $|g'(4)| = 1/2$, para n suficientemente grande el error en el paso n es la mitad del error en el paso anterior.

d) Indique para cual de las tres sucesiones anteriores (caso que converjan) la sucesión $\dfrac{e_{n+1}}{e_n}$ decrece más rápido.

c.1 X
c.2
c.3

e) Tomando $x_0 = 5$, calcule $x_i, (i = 1, 2, \ldots, 5)$ para la sucesión indicada en la parte anterior (trabaje con tres decimales).

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
4.243	4.060	4.015	4.004	4.001

Ejercicio 2) (30 pt.) Se considera el modelo lineal $y(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i\phi_i(t)$, donde ϕ_i son funciones dadas linealmente independientes y a_i son los parámetros del modelo. Se tienen adem´as n datos experimentales $\{(t_k, y_k), i = 1, \ldots, n\}$, con $m << n$.

a) Escriba la matriz A y los vectores x y b del problema de mínimos cuadrados lineal (PMCL) asociado.

Como
$y(t_1) = a_1\phi_1(t_1) + a_2\phi_2(t_1) + \cdots + a_m\phi_m(t_1)$
$y(t_2) = a_1\phi_1(t_2) + a_2\phi_2(t_2) + \cdots + a_m\phi_m(t_2)$
$\vdots$
$y(t_n) = a_1\phi_1(t_n) + a_2\phi_2(t_n) + \cdots + a_m\phi_m(t_n)$
Tomando A y x como abajo, las igualdades de arriba pueden expresarse como $y = Ax$. Buscamos x tal que $||Ax - b||^2$ sea mínima. El ideal sería que dicha norma fuese cero, o sea $Ax = b$, que $y(t_i) = y_i \ \forall i = 1, \ldots, n$

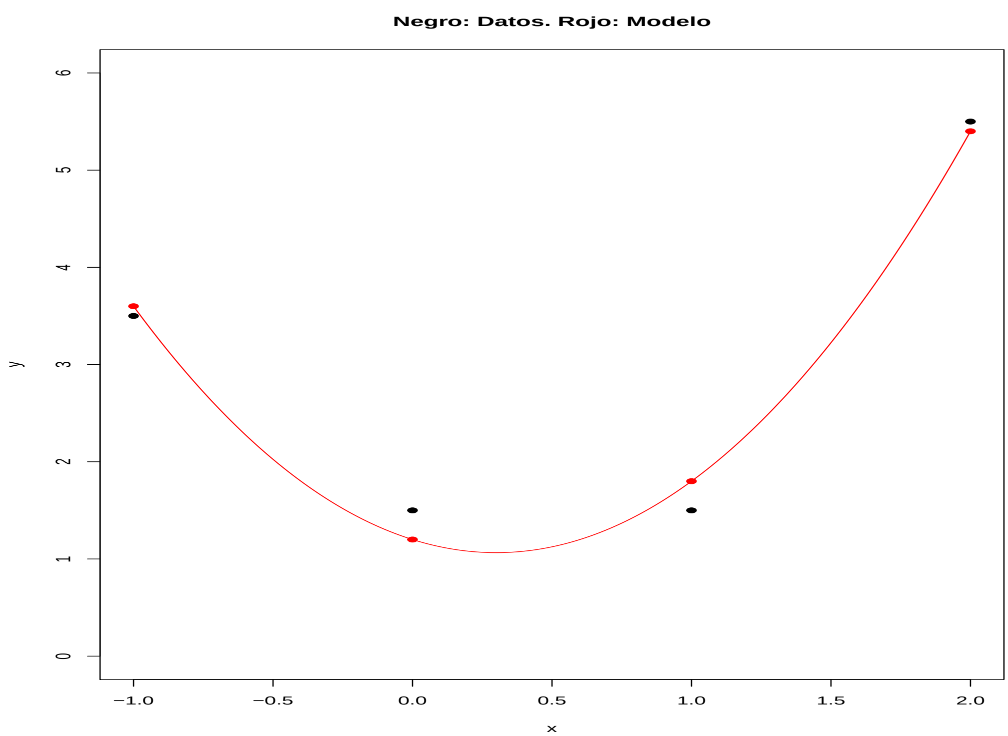
$$A = \begin{pmatrix} \phi_1(t_1) & \phi_2(t_1) & \ldots & \phi_m(t_1) \\ \phi_1(t_2) & \phi_2(t_2) & \ldots & \phi_m(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1(t_n) & \phi_2(t_n) & \ldots & \phi_m(t_n) \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

b) Demuestre que el conjunto de soluciones del PMCL ($\min_x Ax = b$) coincide con las soluciones de las *Ecuaciones Normales*
Resolución: Ver teórico.

c) Se tienen los 4 datos experimentales $\{(-1, \frac{7}{2}), (0, \frac{3}{2}), (1, \frac{3}{2}), (2, \frac{11}{2})\}$ y el modelo $y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Resuelva el PMCL y escriba A, b, a_0, a_1, a_2 (trabaje con 3 decimales).

Resolución: Tenemos $\phi_1(t) = 1\ \forall t,\ \phi_2(t) = t\ \forall t,\ \phi_3(t) = t^2\ \forall t$, de donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 5.5 \end{pmatrix}$

$a_0 = 1.200,\ a_1 = -0.900,\ a_2 = 1.500$



..

Ejercicio 3) (30 pt.)

a) Plantee el problema de interpolación y deduzca el método de interpolación de Newton.
Resolución:
Sean los puntos $\{(x_i, y_i), i = 0, 1, \ldots, n\}$, buscamos un polinomio $p(x)$ tal que $p(x_i) = y_i \; \forall i = 0, 1, \ldots, n$.
Supongamos que ya tenemos el polinomio interpolante $q(x)$ por los puntos $\{(x_0, y_0), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$, entonces

$$p(x) = q(x) + \tilde{q}(x) \tag{5}$$

donde $\tilde{q}(x_i) = 0 \; \forall i = 0, 1, \ldots, n-1$ (esto es, $\tilde{q}$ no estropea la interpolación ya lograda con q) y además

$$p(x_n) = q(x_n) + \tilde{q}(x_n) = y_n \tag{6}$$

Como q tiene grado n-1 (interpola n puntos) y p tiene grado n (interpola n+1 puntos), entonces $\tilde{q}$ deberá tener grado n.
Entonces $\tilde{q}(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})A$, donde A es una constante que podremos despejar.
De la ecuación (6) tenemos $q(x_n)+(x_n-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})A = y_n$, de donde $A = \dfrac{y_n - q(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1})}$.
Entonces

$$p(x) = q(x) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})(y_n - q(x_n))}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1})} \tag{7}$$

b) Encuentre el polinomio interpolante $q(x)$ por los puntos $\{(-1, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 1)\}$ utilizando el método de Lagrange.
Resolución:
Tenemos que $q(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x) = l_3(x)$ ya que $y_0 = y_1 = y_2 = 0$ e $y_3 = 1$.
Por tanto $l_3(x) = \dfrac{(x - (-1))(x - 1)(x - 2)}{(3 - (-1))(3 - 1)(3 - 2)} = \dfrac{(x + 1)(x - 1)(x - 2)}{8}$.
Si aplicamos distributiva obtenemos $q(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{8}$.
Cualquiera de las dos formas refiere al mismo $q(x)$.

c) Utilizando el método de Newton encuentre el polinomio interpolante $p(x)$ que interpola los puntos anteriores y el punto $(4, 4)$.
Resolución:
Usando la ecuación (7) y operando, obtenemos

$$p(x) = \frac{(x + 1)(x - 1)(x - 2)}{8} + \frac{(x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 3)(0.25)}{30} \tag{8}$$