Resolución del Examen - Métodos Numéricos

Martes 17 de Diciembre de 2019

Problema 1 (30 puntos)

Considere el Problema de Mínimos Cuadrados Lineal (PMCL): $\min_x \|b - Ax\|_2$, con $A \in R^{m\times n}$, $b \in R^m$, $x \in R^n$ y $m > n$.

a) Deduzca el Sistema de Ecuaciones Normales asociado al PMCL.
b) ¿Cómo resolvería p Ecuaciones Normales asociadas a p PMCL diferentes, asumiendo que A no cambia?. Calcule el número de operaciones respectivo.
c) i) ¿Qué es la descomposición QR de una matriz $A \in R^{m\times n}$?
   ii) Explique cómo se utiliza la descomposición QR para resolver un PMCL.

Resolución:

a) Ver teórico
b) Primero calculamos la descomposición de Cholesky para A^tA, ($\frac{n^3}{3}$ operaciones) tenemos entonces L triangular tal que $A^tA = LL^t$.

   Tenemos p sistemas de la forma

$$A^tAX = A^tb_i,\ i = 1, \dots, p \tag{1}$$

   Sustituyendo obtenemos p sistemas

$$LL^tX = A^tb_i,\ i = 1, \dots, p \tag{2}$$

   Los cuales resolvemos en dos pasos: Primero resolvemos

$$LY = A^tb_i\ (\frac{n^2}{2} \text{ operaciones}) \tag{3}$$

   para luego resolver

$$L^tX = Y; (\frac{n^2}{2} \text{ operaciones}) \tag{4}$$

   Esto nos da n^2 operaciones por c/u de los p sistemas.

   El total entonces es $\frac{n^3}{3} + pn^2$ operaciones.

   Observación: En lugar de usar la descomposición de Cholesky se puede usar también la descomposición LU para A^tA. Mas allá de cambios en la cantidad de operaciones, el resto se mantiene igual.
c) Ver teórico.

Problema 2 (35 puntos)

a) Describa el Método de Newton-Raphson (NR) para estimar la raíz de una ecuación vectorial: $f(X) = \vec{0}$, con $f : R^n \to R^n$.

b) Partiendo de $X_0 = (0, 0)$ calcule X_2 aplicando NR a la función:

$$f(x, y) = (x^2 + 2y - 2, x - 2y + 2).$$

c) Se considera la función:

$$g(x, y) = (x^2 + 2y + x - 2, x - y + 2).$$

i) Verifique que $f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow g(x, y) = (x, y)$.

ii) Partiendo de $X_0 = (0, 0)$ calcule X_2 aplicando el MIG con la función g.

d) Sea X_{sol} la solución exacta de $f(x, y) = (0, 0)$ que no tiene coordenadas negativas. Halle X_{sol} y compare $\|X_{sol} - X_2\|_2^2$ para los valores de X_2 calculados en (b) y (c).

Resolución:

a) Ver teórico.

b) Como $f(x, y) = (x^2 + 2y - 2, x - 2y + 2)$, tenemos que $\mathbb{J}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

NR queda $X_{k+1} = X_k + p_k$, donde p_k se halla resolviendo el sistema

(5) $$\mathbb{J}_f(X_k)p_k = -f(X_k)$$

por tanto primero hallamos $p_0 = \begin{pmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \end{pmatrix}$ resolviendo el sistema

(6) $$\mathbb{J}_f(X_0)p_0 = -f(X_0)$$

Dicho sistema es

(7) $$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La solución es $p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, por tanto $X_1 = X_0 + p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Del mismo modo calculamos $X_2 = X_1 + p_1$, donde p_1 es solución del sistema

(8) $$\mathbb{J}_f(X_1)p_1 = -f(X_1)$$

que en esta ocasión queda

(9) $$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución es $p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de donde $X_2 = X_1$

c)
- i) $g(x, y) = (x, y) \Leftrightarrow (x^2 + 2y + x - 2, x - y + 2) = (x, y) \Leftrightarrow (x^2 + 2y - 2, x - 2y + 2) = (0, 0) \Leftrightarrow f(x, y) = (0, 0)$

- ii) Aplicamos el MIG:

$$X_1 = g(X_0) = (-2, 2) \tag{10}$$

$$X_2 = g(X_1) = (4 + 4 - 2 - 2, -2 - 2 + 2) = (4, -2) \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

De donde $X_2 = (4, -2)$.

d) La solución exacta de $f(x, y) = (0, 0)$ se encuentra resolviendo el sistema

$$x^2 + 2y - 2 = 0 \tag{13}$$

$$x - 2y + 2 = 0 \tag{14}$$

Si a la segunda ecuación le sumamos la primera, obtenemos $x^2 + x = 0$, de donde $x = 0$, $x = -1$. Para $x = 0$ obtenemos $y = 1$, por lo que $X_{sol} = (0, 1)$.

Con el X_2 hallado en b) tenemos $||X_{sol} - X_2||_2^2 = 0$.

Con el X_2 hallado en c) tenemos $||X_{sol} - X_2||_2^2 = (0 - 4)^2 + (1 - (-2))^2 = 16 + 9 = 25$.

N-R convergió en 1 paso, mientras que el MIG se aleja de la solución ($||X_{sol} - X_1^{MIG}||_2^2 = (-2)^2 + (1 - 2)^2 = 5$).

Problema 3 (35 puntos)

a) Describa el Método de Euler "hacia atrás" (EAt) para la resolución de una EDO:

$$y'(x) = f(x, y).$$

b) Explique su implementación mediante "Predictor-Corrector".

c) Halle la región de estabilidad de EAt (sin Predictor-Corrector).

d) Plantee una implementación alternativa de EAt basada en Newton-Raphson.

e) Se considera la EDO asociada a $f(x,y) = x^2y - 2y$. Sea y_{n+1} la estimación obtenida al aplicar EAt. Exprese y_{n+1} en términos de y_n, x_{n+1} y h.

Resolución:

a) Ver teórico
b) Ver teórico
c) Ver teórico
d) Euler hacia atrás: $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$. Podemos plantear la igualdad anterior como $F(y_{n+1}) = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) - y_{n+1} = 0$, lo que sugiere resolver

$$F(y) = y_n + hf(x_{n+1}, y) - y = 0$$

Aplicando N-R a $F(y) = 0$, tenemos $F'(y) = h\frac{\partial f}{\partial y}(x_{n+1}, y) - 1$.

Tenemos entonces $y_{n+1}^{(k+1)} = y_{n+1}^{(k)} - \frac{F(y_{n+1}^{(k)})}{F'(y_{n+1}^{(k)})}$, que iteramos en k hasta satisfacer el criterio de parada.

e) Tenemos $f(x,y) = x^2y - 2y$, aplicando Euler hacia atrás tenemos

$$y_{n+1} = y_n + h(x_{n+1}^2 y_{n+1} - 2y_{n+1})$$

Operando (distributiva y sacar y_{n+1} de factor común), tenemos

$$y_{n+1} = y_n + y_{n+1}(hx_{n+1}^2 - 2h) \tag{15}$$

$$y_{n+1} - y_{n+1}(hx_{n+1}^2 - 2h) = y_n \tag{16}$$

De donde

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - hx_{n+1}^2 + 2h}$$