Solución - Examen de Métodos Numéricos
26 de Julio de 2019

Problema 1

a) Sea D la matriz diagonal de A. Como D es invertible por hipótesis, la solución verifica $x = D^{-1}(D - A)x + D^{-1}b$. El método de Jacobi consiste en la siguiente iteración de punto fijo: $x^{k+1} = Qx^k + r$, con $Q = D^{-1}(D - A)$ y $r = D^{-1}b$, con $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

b) La consistencia implica que $\alpha = Q\alpha + r$, siendo α la única solución del sistema $Ax = b$. El error absoluto $e^{(k+1)}$ es entonces:

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - \alpha = (Qx^{(k)} + r) - (Q\alpha + r) = Q(x^{(k)} - \alpha) = Qe^{(k)}.$$

Luego, por inducción completa se deduce que $e^{(k+1)} = Q^{k+1}e^{(0)}, \forall k \geq 0$.

c) En este caso $D = I$ por lo que $r = \alpha = (0, 1, 1)^t$ y $Q = D - A$.

d) Calculamos

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$Q^{2m} = \left(Q^2\right)^m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^m & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix}, \forall\, m > 0.$$

Tomando $e^0 = (0, 1, 0)$ se consigue $e^{2m} = Q^{2m}e^0 = (0, 4^m, 0)$, que no converge al vector nulo.

e) La matriz de Jacobi relajado es $Q_{JOR}(w) = wQ + (1 - w)I$. Si λ es valor propio de Q, entonces $\lambda' = w\lambda + 1 - w$ es valor propio de Q_{JOR}. Los valores propios de Q son 0, 2 y -2. Entonces, los valores propios de Q_{JOR} son $1 - w, 1 + w$ y $1 - 3w$. El requisito $|1 + w| < 1$ implica $w < 0$, y el requisito $|1 - w| < 1$ implica $0 < w < 2$, por lo que no existe relajación convergente.

Problema 2

1. Definiendo el vector $Y = (y, v)^t$ con $v(t) = y'(t)$, se consigue que
$y' = 0y + 1v$, mientras que
$v' = y'' = 2v - 1y$.
Es posible plantear el problema mediante un PVI vectorial de la forma $Y' = AY$ con $Y(0) = (y(0), v(0))^t = (2, 1)^t$, siendo
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. El método de Jacobi consiste en $Y_{k+1} = Y_k + hAY_k = (I + hA)Y_k = BY_k$, siendo
$$B = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -h & 1 + 2h \end{pmatrix}.$$
Luego $Y_1 = BY_0 = (3, 1)^t$, mientras que $Y_2 = BY_1 = (4, 0)^t$, y la estimación de Euler de $y(2)$ es la primera coordinada de Y_2, que vale $y_2 = 4$. Observar que el error es 4, pues $y(2) = 0$.

3. Existen métodos que comprometen esfuerzo de cómputo a cambio de orden de consistencia, como Trapecio y Heun. El método de Heun logra orden 2, y es explícito. La primera barrera de Dahlquist asegura la inexistencia de métodos multipaso con orden mayor que $p + 1$ cuando hay una cantidad p impar de etapas en un método multipaso lineal. Por lo tanto, Trapecio y Heun logran el orden máximo con una sola etapa en un método lineal. Si queremos lograr mayores órdenes de consistencia es preciso adoptar métodos multipaso o bien métodos de Runge-Kutta con varias etapas. En este caso, vamos a aplicar Heun como método alternativo: $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}[AY_n + A(Y_n + hAY_n)] = (I + \frac{h}{2}A + hAB)Y_n = CY_n$, siendo
$$C = \begin{pmatrix} 1 - h^2/2 & h + h^2 \\ -h - h^2 & 1 + 2h + 3/2h^2 \end{pmatrix}.$$
Tomando el mismo paso $h = 1$ resulta
$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ -2 & 9/2 \end{pmatrix}.$$
Luego, con Heun tenemos que $Y_1^H = CY_0 = (3, 1/2)^t$, $Y_2^H = CY_1^H = (5/2, 3/4)^t$, y la estimación es la primera coordenada: $y_2^H = 5/2$, qie sigue siendo errática, pues $y(2) = 0$. Vale destacar que estos tamaños de paso son impracticables, y lo habitual es trabajar con pasos del orden de un millonésimo o menores, nuevamente comprometiendo cómputo, calidad y error de propagación de las operaciones.

Problema 3

a) Nos brindan $n+1$ puntos distintos en el plano $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, donde las abscisas están ordenadas y son distintas: $x_0 < x_1 < \ldots x_n$. Recordemos que el polinomio interpolante se define como el polinomio de orden n o menos, $p_n(x)$ tal que $p_n(x_i) = y_i$ para todo $i = 0, \ldots, n$.

Primero, vamos a probar que tal polinomio p_n existe. Para ello, vamos a valernos de la base de Lagrange. Definamos $l_i : l_i(x)$ verifica $l_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$, mientras que $l_i(x_i) = 1$. Existe un polinomio de grado n o menos que cumple lo anterior:

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$$

Ahora veremos que $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$. En efecto, el grado de p_n es n o menos, pues cada l_i tiene grado n o menos. Además: $p_n(x_k) = y_k l_k(x_k) = y_k$. Esto comprueba que el polinomio interpolante existe.

Para demostrar que es único, supongamos por un momento que existe $q(x)$ que es polinomio interpolante. Veremos que $q(x) = p_n(x)$. Para ello, consideremos el polinomio resta, $o(x) = q(x) - p_n(x)$. Es claro que $o(x)$ tiene grado n o menos, por ser resta de dos polinomios con grado n o menos. Además, tiene al menos $n+1$ raíces, pues $o(x_i) = p_n(x_i) - q(x_i) = y_i - y_i = 0$. Pero por el Teorema Fundamental del Álgebra, un polinomio de grado k tiene exactamente k raíces complejas. La única posibilidad es que o tenga infinitas raíces, y sea el polinomio nulo: $o(x) = 0$. Esto implica que $q(x) = p_n(x)$, y asegura que el polinomio interpolante es único.

b)

Teorema 1 (Acotación del Error por Interpolación Polinómica)**.** *Sea f de clase C^{p+1} en el intervalo $[x_0, x_n]$ y p_n el polinomio interpolante a f por las abscisas $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Luego, para cada $x \in [x_0, x_n]$ existe $\gamma(x) \in [x_0, x_n]$ tal que se cumple la siguiente igualdad para el error $E(x)$:*

$$E(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{p+1}}{(p+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Demostración. Tomemos $x \in [x_0, x_n]$ fijo. Si $x = x_i$ para algún i, la igualdad es evidente, pues $E(x_i) = 0$. Supongamos entonces que x no coincide con ninguna de las abscisas. Consideremos la función auxiliar $F : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(t) = f(t) - p_n(t) - (f(x) - p_n(x)) \frac{\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}.$$

Se observa que $F(x_i) = 0$ para cada $i = 0, \ldots, n$, y además $F(x) = 0$, por lo que F tiene al menos $n+2$ raíces en $[x_0, x_n]$. Como f es de clase $\mathcal{C}^{p+1}$, resulta que F también es de clase $\mathcal{C}^{p+1}$. Sean $p_0 < p_1 \ldots < p_{n+1}$ las $n+2$ raíces de F ordenadas. Aplicando el Teorema de Rolle en cada intervalo, podemos asegurar que existen $n+1$ raíces $p'_0 < \ldots < p'_n$ para F'. Aplicando reiteradas veces el teorema de Rolle es posible asegurar la existencia de una raíz $\gamma(x) \in [x_0, x_n]$ de la función $F^{(n+1)}$. Como p_n es un polinomio de grado n o menos, tenemos que su derivada de orden $n+1$ es nula. Entonces, al derivar $n+1$ veces la función F tenemos que:

$$F^{(n+1)}(\gamma(x)) = f^{(n+1)}(\gamma(x)) - (n+1)! \frac{f(x) - p_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} = 0.$$

Finalmente despejando $f(x) - p_n(x)$ se prueba el enunciado. □

c) Existen funciones continuas definidas en un dominio compacto, tales que la familia de polinomios interpolantes p_n por $n+1$ abscisas equiespaciadas diverge en norma infinito. Tal es el caso de la función de Runge $R(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, definida en el intervalo $[-1, 1]$. La norma infinito de la derivada enésima de la función de Runge crece con orden $n!5^n$, superior al factorial, y en este caso el error diverge al infinito.