Solución Examen - Métodos Numéricos

Julio de 2017

Ejercicio 1 (35 puntos)

1) Ver teórico.
2) El problema test, dado $q \in \mathbb{C}$ es:

$$\text{Problema Test} \begin{cases} \dot{y}(t) = qy(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Aplicando el Mtodo de Heun, con $f(y,t) = qy$, resulta:

$$y_{k+1} = [1 + hq + (hq)^2/2]y_k$$

De donde la condición de estabilidad es con $z = qh \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : |1 + z + z^2/2| \leq 1\}$$

3) Resta mostrar que la región de estabilidad es simétrica respecto del eje real. Esto es lo mismo que mostrar que si $z \in \mathcal{R}$ entonces $\bar{z} \in \mathcal{R}$.

Tomando $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$:

$$\begin{aligned}
|1 + \bar{z} + \bar{z}^2/2| &= |1 + (a - bi) + (a - bi)^2/2| \\
&= |(1 + a + a^2/2 - b^2/2) + i(-b - ab)| \\
&= \sqrt{(1 + a + a^2/2 - b^2/2)^2 + (-b - ab)^2} \\
&= \sqrt{(1 + a + a^2/2 - b^2/2)^2 + (b + ab)^2} \\
&= |(1 + a + a^2/2 - b^2/2) + i(b + ab)| \\
&= |1 + (a + bi) + (a + bi)^2/2| \\
&= |1 + z + z^2/2|
\end{aligned}$$

Esto muestra que la región de estabilidad contiene a z y $\bar{z}$. Por lo tanto es simétrica respecto del eje real.

4) Se define la variable $z(t) = \dot{y}(t)$ y el vector solucin del sistema 2×2 de EDOs igual a $Y(t) = [y(t), z(t)]^T$.

A partir de eso el mtodo de Heun se plantea como:

$$Y_{k+1} = Y_k + h/2\,(F(P_k, t_{k+1}) + F(Y_k, t_k))$$
$$P_k = Y_k + hF(Y_k, t_k)$$

La siguiente tabla resume los cálculos realizados.

k	t_k	$Y_k^{(1)}$	$Y_k^{(2)}$	$P_k^{(1)}$	$P_k^{(2)}$
0	0	-1.000E+0	+1.000E+0	+0.000E+0	+2.000E+0
1	1	+5.000E-1	+1.000E+0	+1.500E+0	+5.000E-1
2	2	+1.250E+0	+2.500E-1		

Ejercicio 2 (30 puntos)

1) La Regla de Gauss de $N+1$ puntos selecciona $x_0, \dots, x_N$ como las $N+1$ raíces del polinomio de Legendre normalizado q_{N+1}, y los pesos se deducen de integrar el polinomio interpolante de Lagrange de f por las abscisas $x_0, ldots, x_N$.

   Esta definición es equivalente a proponer la regla de máximo grado de exactitud (tanto las raíces como los pesos se deducen de resolver el correspondiente sistema no lineal). Ambas definiciones se consideran correctan.
2) Una regla de integración tiene grado de exactitud m si integra sin error a todos los polinomios de grado m o menos, y existe algń polinomio de grado $m+1$ en el que comete error no nulo.
3) La regla de Gauss con p puntos integra exactamente a todo polinomio con grado $2p-1$ o menor. Luego, si $2p-1 \geq n$ se cumple la condición solicitada. El primer natural p que verifica la condición anterior es $p = \frac{n+1}{2}$ si n es impar, o $p = \frac{n+2}{2}$ si n es par.
4) Se debe realizar un cambio de variable de manera de escribir la integral en el intervalo $[-1, +1]$. Esto se puede hacer de varias maneras, una de ellas es deduciendo que:

$$\int_a^b f(u)du = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{b-a}{2}v + \frac{b+a}{2}\right) dv$$

   Con lo cual dadas las absisas (x_i) y pesos (w_i) dados se puede aproximar la integral como:

$$\int_a^b f(u)du \simeq \frac{b-a}{2} \sum_{1,2} w_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right)$$

   Evaluando resulta:

$$\int_0^{3\pi/2} |sin(u)|du \simeq \frac{3\pi}{4}\left[\left|\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{3\pi}{4}\right)\right| + \left|\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{3\pi}{4}\right)\right|\right]$$

   Y el resultado numérico del método de Gauss es:

$$\int_0^{3\pi/2} |sin(u)|du \simeq 3.26$$

   La integral exacta se calcula de la siguiente manera:

$$\int_0^{3\pi/2} |sin(u)|du = \int_0^{\pi} sin(u)du + \int_{\pi}^{3\pi/2} -sin(u)du$$

$$\int_0^{3\pi/2} |sin(u)|du = 2 + 1 = 3$$

   El error relativo resulta entonces:

$$\text{Error Relativo} = \frac{|3.26-3|}{|3|} = 0.086$$

Ejercicio 3 (35 puntos)

1) El conjunto de soluciones del Problema de Mínimos Cuadrados Lineal (PMCL), $\min_x \|Ax - b\|_2^2$ coincide con el de las ecuaciones normales: $A^t Ax = A^t b$.

   Proof. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ solución de las ecuaciones normales, y tomemos $y \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Como x es solución de las ecuaciones normales, tenemos que $A^t(Ax-b) = 0$. Luego:

$$
\begin{aligned}
\|b - Ay\|_2^2 &= \|b - Ax + A(x-y)\|_2^2 \\
&= \|b - Ax\|_2^2 + \|A(x-y)\|_2^2 + (A(x-y))^t(b - Ax) + (b - Ax)^t(A(x-y)) \\
&= \|b - Ax\|_2^2 + \|A(x-y)\|_2^2,
\end{aligned}
$$

   donde se ha utilizado en el último paso que $(A(x-y))^t(b-Ax) = (x-y)^t[A^t(b-Ax)] = 0$ y que $(b - Ax)^t(A(x-y)) = (x-y)^t[A^t(b - Ax)] = 0$. Luego, $\|b - Ay\|_2^2 \geq \|b - Ax\|_2^2$ para cualquier $y \in \mathbb{R}^n$, mostrando así que x alcanza la norma mínima en el PMCL, y es por tanto solución del PMCL.
   Veamos por último que si x no es solución de las ecuaciones normales, entonces tampoco minimiza la expresión $\|Ay - b\|_2^2$. Sea $A^t(Ax - b) = z$ un vector no nulo, y elijamos y tal que $x - y = -hz$ para h pequeño positivo. Entonces:

$$
\begin{aligned}
\|b - Ay\|_2^2 &= \|b - Ax\|_2^2 + h^2\|Az\|_2^2 - 2h(Az)^t(b - Ax) \\
&= \|b - Ax\|_2^2 + h^2\|Az\|_2^2 - 2h\|z\|_2^2 < \|b - Ax\|_2^2,
\end{aligned}
$$

   si se elige h suficientemente pequeño, donde se ha utilizado que $(Az)^t(b-Ax) = z^t[A^t(b-Ax)] = z^t z = \|z\|_2^2$. Luego, x no minimiza $\|b-Ay\|_2^2$, y por tanto no es solución del PMCL. Esto concluye el hecho que la soluciones de las ecuaciones normales y el PMCL coinciden, como se quería demostrar. □

2) La matriz Q es ortogonal y cuadrada, mientras que $R = Q^t A$ es triangular superior. La matriz Q se obtiene de aplicar el método de ortonormalización de Gram Schmidt a las columnas de la matriz A. Ver detalles en el repartido de teórico del curso.
3) Ver detalles de aplicación de la descomposición QR en el repartido de teórico del curso.
4) Las tres primeras columnas de Q se llaman Q_1. Las primeras tres filas de R se llaman R_1. La descomposición QR se puede escribir como:

$$
A = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

   Multiplicando a la izquierda por Q_1^T obtenemos:

$$
Q_1^T A = R_1
$$

   Usando la ecuación anterior hallamos fácilmente R_1, mediante un producto de matrices:

$$
R_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & -1/\sqrt{(3)} \\ 0 & -\sqrt{3} & 1/\sqrt{(3)} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{(3)} \end{bmatrix}
$$

   Se calcula a continuación $Q_1^T b$:

$$Q_1^T b = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solución al PMC usando la descomposición QR es x tal que: $R_1 x = Q_1^T b$. Realizando la sustitución hacia atrás necesaria se obtiene:

$$x = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$