

Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural

Apuntes de Tema 2: Elemento de barra

Pablo Castrillo - Versión 3: 13 de agosto de 2014

Dpto. de Estructuras, Instituto de Estructuras y Transporte
Facultad de Ingeniería, Universidad de la República

Sobre los materiales teóricos de MCACE 2014 Este documento forma parte de los apuntes de teórico del curso Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural (MCACE) 2014. Este material es una guía de apoyo que no sustituye los contenidos dictados en clase y se encuentra en proceso de revisión. Las referencias bibliográficas centrales son los libros Oñate [2013] y Rao [2004], por otra parte a lo largo del material se citan otras referencias también relevantes para la comprensión de cada tema.

Índice del capítulo

2. Elemento de barra	2
2.1. Introducción	2
2.2. Marco para el método de elementos finitos	3
2.2.1. Formulación fuerte	3
2.2.2. Principio de Hamilton	6
2.2.3. Equivalencia: Hamilton - Formulación fuerte	9
2.2.4. Aplicación del Método de los Elementos Finitos (MEF)	12
2.3. Elemento finito de barra de dos nodos 3D	14
2.3.1. Cambio de coordenadas	17
2.3.2. Grados de libertad y ensamblaje de matriz de rigidez	19
2.3.3. Utilización de Octave	21
2.4. Elemento finito de barra de tres nodos 3D	24

Capítulo 2

Elemento de barra

Este material es una guía para las clases tres y cuatro del teórico. Se abordan tres temas centrales: Marco para el método de elementos finitos, elemento finito de barra de dos nodos 3D y elemento finito de barra de tres nodos 3D.

2.1. Introducción

En esta sección recordaremos algunos puntos importantes sobre la teoría de elasticidad lineal, para un detalle más extenso de los mismos se recomienda fuertemente ver los capítulos 2, 3, 4 y 5 de Canelas [2013, 2014].

El problema de elasticidad lineal consiste en hallar la función desplazamiento \mathbf{u} , el tensor de deformaciones \mathbf{D} y el tensor de tensiones \mathbf{T} en cualquier punto del cuerpo en estudio que ocupa una región Ω .

Teorema 2.1. (Teorema de Cauchy de existencia del tensor de tensiones) Dado un punto $P \in \Omega$, existe un tensor $\mathbf{T}(P) \in \text{Lin}$, que llamaremos *tensor de tensiones*, que cumple:

$$\mathbf{f}(P, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(P)\mathbf{n}. \quad (2.1)$$

Llamaremos *tensor* a una transformación lineal que se define de \mathcal{V}_3 en \mathcal{V}_3 , y Lin al conjunto de los tensores, es decir:

$$\text{Lin} = \{\mathbf{L} : \mathcal{V}_3 \rightarrow \mathcal{V}_3 \mid \mathbf{L} \text{ es un tensor lineal}\}.$$

En los temas básicos del curso (temas no avanzados) asumiremos dos hipótesis importantes:

- **Pequeños desplazamientos:** Asumiremos que las ecuaciones de equilibrio pueden plantearse en la configuración de referencia. Esto implica realizar una cierta aproximación, puesto que, estrictamente, las ecuaciones de equilibrio sólo podrían ser planteadas en la configuración deformada, en la cual aparecen las tensiones internas de acuerdo con el comportamiento constitutivo del material.

- **Pequeñas deformaciones:** Esta aproximación es la que hace que el tensor de deformaciones infinitesimales caracterice los cambios de forma en el entorno de una partícula de Ω .

2.2. Marco para el método de elementos finitos

Esta sección describe el sistema de ecuaciones que gobiernan los problemas a tratar en el curso. Se tratarán principios variacionales y la formulación de elementos finitos a utilizar. Ésta sección servirá como el marco para el desarrollo de los capítulos siguientes.

2.2.1. Formulación fuerte

Dado un cuerpo que ocupa la región $\Omega \subset \mathcal{E}_3$, siendo \mathcal{E}_3 el espacio euclidiano tridimensional, llamaremos $\bar{\Omega}$ a la clausura de Ω , es decir, el menor dominio cerrado que contiene a Ω , esto es $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. La *formulación clásica*, también llamada *formulación fuerte* del problema de elasticidad lineal consiste en hallar los campos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} : \bar{\Omega} &\rightarrow \mathcal{V}_3, & \text{con } \mathbf{u} &\in C^0(\bar{\Omega}, \mathcal{V}_3), & \mathbf{u} &\in C^2(\Omega, \mathcal{V}_3), \\ \mathbf{D} : \bar{\Omega} &\rightarrow \text{Sim}, & \text{con } \mathbf{D} &\in C^0(\bar{\Omega}, \text{Sim}), & \mathbf{D} &\in C^1(\Omega, \text{Sim}), \\ \mathbf{T} : \bar{\Omega} &\rightarrow \text{Sim}, & \text{con } \mathbf{T} &\in C^0(\bar{\Omega}, \text{Sim}), & \mathbf{T} &\in C^1(\Omega, \text{Sim}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

que satisfacen las siguientes ecuaciones [Wu and Gu, 2012]:

$$\text{Equilibrio puntual: } \rho \ddot{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) - \nabla \cdot \mathbf{T}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{b}(t, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.3)$$

$$\text{Cond. iniciales: } \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_c^0(0, \mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{u}}(0, \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{u}}_c^1(0, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.4)$$

$$\text{Cond. de borde cinemáticas: } \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_c(t, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_u \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (2.5)$$

$$\text{Cond. de borde mecánicas: } \mathbf{T}(t, \mathbf{x}) \mathbf{n} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_f \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (2.6)$$

$$\text{Ecuación constitutiva: } \mathbf{T}(t, \mathbf{x}) = \mathbb{C}(\mathbf{D}(t, \mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.7)$$

$$\text{Relación Deformación-Desplazamiento: } \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \mathbb{F}(\mathbf{u}(t, \mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.8)$$

$$\partial\Omega = \bar{\partial\Omega}_u \cup \bar{\partial\Omega}_f. \quad (2.9)$$

En la Figura 2.1 se describe un caso general reflejado por las ecuaciones anteriores, donde:

- $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$.
- ρ representa la densidad de masa por unidad de volumen.
- \mathbf{T} representa el tensor de tensiones.
- \mathbf{D} representa el tensor de deformaciones.
- \mathbf{b} representa las fuerzas de volumen.
- \mathbf{u}_c^0 representa los desplazamientos iniciales.

- \mathbf{u}_c^1 representa las velocidades iniciales.
- \mathbf{u}_c son los desplazamientos conocidos en el borde $\partial\Omega_u$.
- \mathbf{f} representa las fuerzas de superficie aplicadas en el borde $\partial\Omega_f$.
- \mathbf{n} representa la normal saliente para la frontera que corresponda $\partial\Omega$.
- en el curso utilizaremos que $\mathbb{C}(\mathbf{D}(t, \mathbf{x})) = \nabla U_0(\mathbf{D}(t, \mathbf{x}))$ donde U_0 es la *densidad de energía de deformación*. Asumiendo así que el material es hiperelástico lineal, esto equivale a que la relación entre tensiones y deformaciones sea lineal. Esta hipótesis no se cumple en materiales como el hormigón ó en el acero a partir de ciertos valores de la deformación. La función U_0 cumple las siguientes condiciones:

$$U_0(\mathbf{0}) = 0, \quad (2.10)$$

$$U_0(\mathbf{D}) > 0 \quad \forall \mathbf{D} \neq 0, \quad (2.11)$$

$$\nabla U_0(\mathbf{D}) = \mathbb{C}(\mathbf{D}). \quad (2.12)$$

Si se cumple que el material es isótropo, \mathbb{C} es simétrico, se tiene que:

$$U_0(\mathbf{D}) = \frac{1}{2} \mathbf{D} : \mathbb{C}(\mathbf{D}). \quad (2.13)$$

- en el curso utilizaremos que $\mathbb{F}(\mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T}{2}$, considerando así pequeñas deformaciones.

Supondremos que las superficies $\partial\Omega_u$ y $\partial\Omega_f$ son abiertas respecto de $\partial\Omega$, $\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_f = \emptyset$ y $\overline{\partial\Omega_u} \cup \overline{\partial\Omega_f} = \partial\Omega$, es decir, **donde se conocen los desplazamientos no se conocen las fuerzas de superficie y viceversa**. Consideraremos $\mathbf{u}_c \in C^0(\overline{\partial\Omega_u}, \mathcal{V}_3)$ y $\mathbf{f}_c \in C^0(\overline{\partial\Omega_f}, \mathcal{V}_3)$. Note que en el problema de elasticidad lineal, las regiones Ω , $\partial\Omega_u$ y $\partial\Omega_f$ son consideradas conocidas.

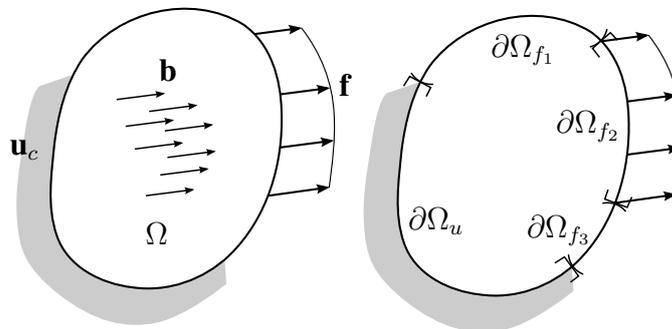
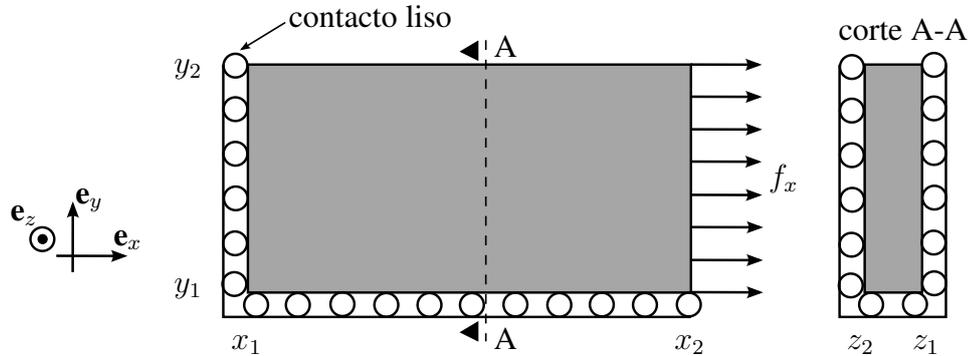


Figura 2.1: Formulación fuerte.

En la Figura 2.1 se tiene que $\partial\Omega_f = \partial\Omega_{f_1} \cup \partial\Omega_{f_2} \cup \partial\Omega_{f_3}$.

Ejemplo 2.1.

Definimos las siguientes regiones:

- $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2, z_1 < z < z_2\}$
- $\partial\Omega_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x_1 < x < x_2, y = y_1, z_1 < z < z_2\}$
- $\partial\Omega_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = x_2, y_1 < y < y_2, z_1 < z < z_2\}$
- $\partial\Omega_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x_1 < x < x_2, y = y_2, z_1 < z < z_2\}$
- $\partial\Omega_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = x_1, y_1 < y < y_2, z_1 < z < z_2\}$
- $\partial\Omega_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2, z = z_1\}$
- $\partial\Omega_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2, z = z_2\}$

Según cada dirección se tiene que:

- Según e_x : $\partial\Omega_4 \subset \partial\Omega_u$ y $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega_f$ con $i = 1, 2, 3, 5$ y 6 .
- Según e_y : $\partial\Omega_1 \subset \partial\Omega_u$ y $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega_f$ con $i = 2, 3, 4, 5$ y 6 .
- Según e_z : $\partial\Omega_5, \partial\Omega_6 \subset \partial\Omega_u$ y $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega_f$ con $i = 1, 2, 3$ y 4 .

Siendo $\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z$, según cada región se tiene que:

- En $\partial\Omega_1$: $u_y = 0$, $\mathbf{e}_x^T \mathbf{T}(-\mathbf{e}_y) = 0$ y $\mathbf{e}_z^T \mathbf{T}(-\mathbf{e}_y) = 0$.
- En $\partial\Omega_2$: $\mathbf{T} \mathbf{e}_x = f_x \mathbf{e}_x$.
- En $\partial\Omega_3$: $\mathbf{T} \mathbf{e}_y = \mathbf{0}$.
- En $\partial\Omega_4$: $u_x = 0$, $\mathbf{e}_y^T \mathbf{T}(-\mathbf{e}_x) = 0$ y $\mathbf{e}_z^T \mathbf{T}(-\mathbf{e}_x) = 0$.
- En $\partial\Omega_5$: $u_z = 0$, $\mathbf{e}_x^T \mathbf{T}(-\mathbf{e}_z) = 0$ y $\mathbf{e}_y^T \mathbf{T}(-\mathbf{e}_z) = 0$.
- En $\partial\Omega_6$: $u_z = 0$, $\mathbf{e}_x^T \mathbf{T} \mathbf{e}_z = 0$ y $\mathbf{e}_y^T \mathbf{T} \mathbf{e}_z = 0$.

2.2.2. Principio de Hamilton

En mecánica analítica la cantidad más importante es el trabajo realizado por las fuerzas para realizar desplazamientos arbitrarios infinitesimales. Se define entonces la “acción” \mathcal{L} como:

$$\mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{T} - \Pi dt, \quad (2.14)$$

donde:

- L : Es el *lagrangiano*.
- \mathcal{T} : Es el la energía cinética.
- Π : Es la energía potencial total. $\Pi = U + V$
 - U : Energía de deformación.
 - V : Energía de potencial por las fuerzas externas.

En un **sistema de partículas o un sistema con un número finito de grados de libertad** se pueden definir las coordenadas generalizadas $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$, donde $i = 1, \dots, n$, donde n es el número de grados de libertad y las coordenadas generalizadas q_i son independientes. Con lo anterior L queda definido como:

$$L = L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t). \quad (2.15)$$

En un **sistema continuo o un sistema con un número no finito de grados de libertad** se debe definir la *densidad lagrangiana*, \mathcal{L} , siendo $\phi(\mathbf{x}, t)$ el movimiento de una partícula de coordenadas iniciales \mathbf{x} en un instante t .

$$L = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi(\mathbf{x}, t), \phi_t(\mathbf{x}, t), \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t) dV, \quad (2.16)$$

donde $\phi_t(\mathbf{x}, t) = d\phi(\mathbf{x}, t)/dt$ y $\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)$ se puede interpretar como el gradiente de deformación \mathbf{F} donde $\mathbf{F}_{ij} = \partial\phi_i(\mathbf{x}, t)/\partial x_j$ (donde el índice i se refiere a la componente del campo ϕ).

El postulado principal de la mecánica analítica es un principio variacional, conocido como el principio de Hamilton, el cual establece que: De todos los posibles recorridos que puede realizar un sistema mecánico entre una configuración inicial y una final conocidas, el recorrido que efectivamente realiza el sistema es el que hace estacionaria la acción \mathcal{L} del sistema. Con lo cual \mathcal{L} tendrá un valor estacionario en el recorrido real.

Para obtener el valor estacionario, es necesario imponer que la variación $\delta_{\mathbf{v}}\mathcal{L}$ sea 0 para cualquier dirección, es aquí que debemos introducir el concepto de *derivada direccional* para funcionales, como es el caso de \mathcal{L} . La notación $\delta_{\mathbf{v}}$ refiere precisamente a la derivada direccional según la dirección \mathbf{v} .

Definición 2.1. Sea $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, en donde $\Omega \subseteq A$ y A es una subvariedad afín de V con espacio director V_0 . Sea P un punto algebraicamente interior de Ω (en A). La función de variable vectorial F admite *derivada direccional* en $P \in \Omega$, según la dirección $\mathbf{v} \in V_0$, si la función real $\alpha \rightarrow F(P + \alpha\mathbf{v})$ es derivable en $\alpha = 0$. El valor de la derivada direccional lo denotaremos por $\delta_{\mathbf{v}}F(P)$. De la definición se deduce que:

$$\delta_{\mathbf{v}}F(P) := \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F(P + \alpha\mathbf{v}) - F(P)}{\alpha} = \left. \frac{d}{d\alpha} F(P + \alpha\mathbf{v}) \right|_{\alpha=0}$$

En el caso de un sistema discreto se tiene que dados \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 , configuración inicial y final respectivamente, la solución es $\mathbf{q}(t)$ que satisface que $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{Q}_2$ y hace estacionario el funcional $\mathcal{L}(\mathbf{q})$. Para este caso el espacio afín A y el espacio vectorial director V_0 son tales que:

$$A = \{\mathbf{q} / \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{Q}_1 \text{ y } \mathbf{q}(t_2) = \mathbf{Q}_2\}, \quad (2.17)$$

$$V_0 = \{\mathbf{v} / \mathbf{v}(t_1) = 0 \text{ y } \mathbf{v}(t_2) = 0\}. \quad (2.18)$$

Para el sistema discreto el funcional \mathcal{L} queda definido por la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt \text{ donde } i = 1, \dots, n. \quad (2.19)$$

Es importante recordar que $\mathbf{q}(t)$ representa el vector de \mathbb{R}^n : $(q_1(t), \dots, q_n(t))$, lo mismo sucede con $\dot{\mathbf{q}}(t)$, por tanto $\mathbf{L} : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}(\mathbf{q} + \alpha\mathbf{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{L}(\mathbf{q}(t) + \alpha\mathbf{v}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \alpha\dot{\mathbf{v}}(t), t) dt, \quad (2.20)$$

por lo tanto, utilizando la definición de derivada direccional:

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{v}}\mathcal{L}(\mathbf{q}) &= \left. \frac{d}{d\alpha} \mathcal{L}(\mathbf{q} + \alpha\mathbf{v}) \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{d}{d\alpha} \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{L}(\mathbf{q}(t) + \alpha\mathbf{v}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \alpha\dot{\mathbf{v}}(t), t) dt \right) \right|_{\alpha=0} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left. \frac{d}{d\alpha} \mathbf{L}(\mathbf{q}(t) + \alpha\mathbf{v}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \alpha\dot{\mathbf{v}}(t), t) \right|_{\alpha=0} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i} v_i(t) + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{v}_i(t) + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \alpha} dt. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Como $\partial t / \partial \alpha = 0$ se tiene que (se quitará la dependencia del tiempo para simplificar la notación):

$$\delta_{\mathbf{v}}\mathcal{L}(\mathbf{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i} v_i + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{v}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i} v_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{v}_i dt. \quad (2.22)$$

Utilizando integración por partes en la segunda integral de la última expresión se tiene que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{v}_i dt = \sum_{i=1}^{i=n} \left. \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i} v_i \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) v_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) v_i dt, \quad (2.23)$$

donde se utilizó que $\mathbf{v}(t_1) = \mathbf{v}(t_2) = 0$ por lo definido en 2.18. Por lo tanto:

$$\delta_{\mathbf{v}} \mathcal{L}(\mathbf{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] v_i dt. \quad (2.24)$$

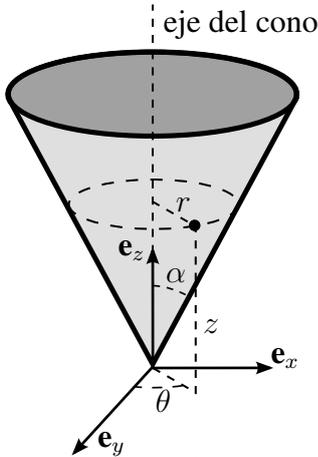
Si elegimos $v_i / v_i = \gamma(t) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right]$ donde $\gamma(t)$ es una función estrictamente positiva en el intervalo (t_1, t_2) tal que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) = 0$, de la igualdad $\delta_{\mathbf{v}} \mathcal{L}(\mathbf{q}) = 0$ se obtiene que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \gamma(t) \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right]^2 dt = 0 \Rightarrow \gamma(t) \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right]^2 = 0, \quad (2.25)$$

con lo cual

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad \forall t \in (t_1, t_2) \quad \text{e } i = 1, \dots, n.} \quad (2.26)$$

Ejemplo 2.2. Consideremos una partícula de masa m limitada a moverse sobre la superficie de un cono de semiángulo α y sometida a la acción de la gravedad. Como se puede ver en la figura el eje del cono se encuentra sobre el eje \mathbf{e}_z y su vértice coincide con el origen. Se puede obtener la expresión de ligadura $z = r \cot(\alpha)$ donde $\cot(\alpha) = 1/\tan(\alpha)$. Con lo anterior se tiene que las coordenadas generalizadas del problema son $\mathbf{q} = (q_1, q_2) = (r, \theta)$.



En este caso se tiene que la posición de la partícula es $\mathbf{x} = r(t) \mathbf{e}_r + z(t) \mathbf{e}_z$, por lo tanto la velocidad es $\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{z} \mathbf{e}_z$ (donde se omitió la dependencia de t para simplificar la notación). Utilizando la ligadura entre z y r se tiene que:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = \frac{\dot{r}^2}{\sin^2(\alpha)} + r^2 \dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 \csc^2(\alpha) + r^2 \dot{\theta}^2,$$

por tanto:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 \csc^2(\alpha) + r^2 \dot{\theta}^2 \right) \quad \mathcal{V} = m g z = m g r \cot(\alpha).$$

Queda así definido el Lagrangiano L como:

$$L = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 \csc^2(\alpha) + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - m g r \cot(\alpha).$$

Utilizando la expresión 2.26 se obtiene:

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m r \dot{\theta}^2 - m g \cot(\alpha) - m \ddot{r} \csc^2(\alpha) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 - m \left(2r\dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta} \right) = 0,$$

Continua ejemplo 2.2. Reordenando el sistema anterior se tiene:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \sin^2(\alpha) + g \cos(\alpha) \sin(\alpha) = 0,$$

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0,$$

de la segunda ecuación se puede obtener que $m r^2 \dot{\theta} = \text{cte} = k$ con lo cual:

$$m^2 r^3 \ddot{r} - k^2 \sin^2(\alpha) + m^2 r^3 g \cos(\alpha) \sin(\alpha) = 0.$$

es la ecuación del movimiento para la coordenada r .

2.2.3. Equivalencia: Hamilton - Formulación fuerte

De la Ecuación 2.14 se puede obtener que la variación respecto a \mathbf{v} es:

$$\delta_{\mathbf{v}} \mathcal{L} = \delta_{\mathbf{v}} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{L} dt = \delta_{\mathbf{v}} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{T} dt - \delta_{\mathbf{v}} \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{U} + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{V} dt \right). \quad (2.27)$$

La energía de deformación, la energía potencial de las fuerzas externas conservativas y la energía cinética se definen como:

- $\mathbf{U}(\mathbf{u}(t)) = \int_{\Omega} U_0(\mathbf{D}(\mathbf{u}(t))) dV$, siendo U_0 la densidad de energía de deformación.
- $\mathbf{V}(\mathbf{u}(t)) = - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}(t) dV - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}(t) dA$, siendo \mathbf{b} las fuerzas por unidad de volumen y \mathbf{f} las fuerzas por unidad de área.
- $\mathcal{T}(\dot{\mathbf{u}}(t)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{u}}(t))^2 dV$.

Con lo anterior la energía potencial queda definida por (en lo que sigue se quitará la dependencia del tiempo para simplificar la notación):

$$\Pi(\mathbf{u}) = \mathbf{U}(\mathbf{u}) + \mathbf{V}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} U_0(\mathbf{D}(\mathbf{u})) dV - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dA. \quad (2.28)$$

Las variación de \mathbf{U} se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{v}} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{U}(\mathbf{u}) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \frac{d}{d\alpha} U_0(\mathbf{D}(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v})) \Big|_{\alpha=0} dV \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \nabla U_0(\mathbf{D}(\mathbf{u})) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) dV \right) dt. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Las variación de V se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{v}} \int_{t_1}^{t_2} V(\mathbf{u}) dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \frac{d}{d\alpha} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}) \Big|_{\alpha=0} dV \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\partial\Omega_f} \frac{d}{d\alpha} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}) \Big|_{\alpha=0} dA \right) dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dA \right) dt. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Las variación de la energía cinética se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{v}} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{T}(\dot{\mathbf{u}}) &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{d\alpha} \rho (\dot{\mathbf{u}} + \alpha \dot{\mathbf{v}})^2 \Big|_{\alpha=0} dV \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} 2\rho (\dot{\mathbf{u}} + \alpha \dot{\mathbf{v}}) \cdot \dot{\mathbf{v}} \Big|_{\alpha=0} dV \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{v}} dV \right) dt = \int_{\Omega} \left(\int_{t_1}^{t_2} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{v}} dt \right) dV \\ &= \int_{\Omega} \left(\rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} dt \right) dV \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(- \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} dt \right) dV. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Donde se asumió que $\mathbf{v}(t_1) = \mathbf{v}(t_2) = 0$ como hipótesis del principio de Hamilton. Utilizando la ecuación constitutiva se tiene que:

$$\begin{aligned} \delta_v \mathcal{L}(\mathbf{u}) &= \int_{t_1}^{t_2} \left(- \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} dV \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) dV \right) dt \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dA \right) dt = 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Utilizando la definición la relación entre desplazamientos y deformaciones (ver Sección 2.2.1) en el segundo término del lado derecho de la Ec. 2.32 se obtiene que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) dV \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{u}) : \frac{\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T}{2} dV \right) dt \quad (2.33)$$

Propiedad 2.1. Sea \mathbf{T} un campo tensorial y \mathbf{v} un campo vectorial. Se cumple que:

$$\nabla \cdot (\mathbf{T}^T \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v},$$

donde “:” representa el producto escalar de tensores, definido por:

$$A : B = \text{tr}(AB^T) = \text{tr}(A^T B) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ij}.$$

Dado que $\mathbf{T}(\mathbf{u})$ es simétrico se puede probar que $\mathbf{T}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} = \mathbf{T}(\mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{v})^T$, utilizando este resultado en la Ecuación. 2.33 se obtiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, dV \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} \, dV \right) dt, \quad (2.34)$$

utilizando la Propiedad 2.1 (con \mathbf{T} simétrico) se tiene que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, dV \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{T}(\mathbf{u})\mathbf{v}) \, dV - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} \, dV \right) dt. \quad (2.35)$$

Teorema 2.2. (de Gauss de la divergencia) Sea Ω un sólido simple de \mathbb{R}^3 y $\partial\Omega$ su borde, orientado con la normal unitaria saliente \mathbf{n} . Sea $F : \Omega \rightarrow \mathcal{V}_3$ un campo vectorial de clase C^1 , entonces:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F \, dV = \int_{\partial\Omega} F \cdot \mathbf{n} \, dA$$

Utilizando el teorema de Gauss en la expresión definida por la Ecuación 2.35 se obtiene que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, dV \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\partial\Omega_f} \mathbf{T}(\mathbf{u})\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} \, dV \right) dt, \quad (2.36)$$

donde se utilizó que: $\mathbf{v}(P) = 0 \quad \forall P \in \partial\Omega_u$.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(- \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, dV - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{T}(\mathbf{u})\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dA \right) dt, \quad (2.37)$$

agrupando en términos de dV y dA y usando que \mathbf{T} es simétrico, obtenemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} [\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}) + \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}] \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{\partial\Omega_f} [\mathbf{f} - \mathbf{T}(\mathbf{u})\mathbf{n}] \cdot \mathbf{v} \, dA \right) dt. \quad (2.38)$$

Dado que dicha expresión es válida $\forall \mathbf{v}$, el mismo se puede elegir arbitrariamente, por ejemplo $\mathbf{v} = \gamma [\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}) + \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}]$ donde γ es la distancia del punto \mathbf{x} al borde $\partial\Omega_f$ (por lo tanto vale 0 en él) se obtiene que:

$$\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}) + \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (2.39)$$

misma expresión que la presentada en la formulación fuerte, ver Ecuación 2.3. Si elegimos $\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{T}(\mathbf{u})\mathbf{n}$ se puede obtener la condición de la Ecuación 2.6.

$$\mathbf{f} - \mathbf{T}(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial\Omega_f \times \mathbb{R}^+. \quad (2.40)$$

2.2.4. Aplicación del Método de los Elementos Finitos (MEF)

Utilizando las definiciones presentadas al inicio de la Sección 2.2.3 y la Ecuación 2.14 se obtiene que:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{u}}(t))^2 dV - \int_{\Omega} U_0(\mathbf{D}(\mathbf{u})) dV + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dA \right) dt \quad (2.41)$$

Recordando la definición vista en el curso Elasticidad,

$$U_0(\mathbf{D}(\mathbf{u})) = \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbb{C}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) = \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{T}(\mathbf{u}) \quad (2.42)$$

Se obtiene que:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{u}}(t))^2 dV - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{T}(\mathbf{u}) dV + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dA \right) dt \quad (2.43)$$

Se puede discretizar entonces el campo de desplazamientos \mathbf{u} en el cuerpo Ω , mediante la utilización de elementos finitos. Diremos entonces que: $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} \mathbf{U}$ y por lo tanto $\dot{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{U}}$.

- $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} \mathbf{U}$
 - $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{U}$
 - $\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbb{C}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{U}$
- $\dot{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{U}}$

$\tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ son matrices globales (definidas en todo Ω), las cuales se pueden mostrar como:

- $\tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}$: Es la matriz de funciones de interpolación globales para el campo de desplazamientos, el tamaño de la misma depende de la discretización que se realice para el campo de desplazamientos.
- $\tilde{\mathbf{B}}$: Es la matriz de derivadas de las funciones de interpolación utilizadas para el campo de desplazamientos.
- $\tilde{\mathbf{C}}$: Es la matriz constitutiva.

Podemos definir así el funcional \mathcal{L} en función de \mathbf{U} , con lo cual estaría definido de forma “discreta”, similar a tener un sistema de partículas.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{U}) &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \left(\int_{\Omega} \rho \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} dV \right) \dot{\mathbf{U}} - \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \left(\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{B}} dV \right) \mathbf{U} \right) dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} \mathbf{U} dV + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} \mathbf{U} dA \right) dt, \end{aligned} \quad (2.44)$$

en la Ecuación 2.44 la expresión de L es:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \left(\int_{\Omega} \rho \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} dV \right) \dot{\mathbf{U}} - \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \left(\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{B}} dV \right) \mathbf{U} \\ &+ \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} \mathbf{U} dV + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} \mathbf{U} dA. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Utilizando la Ecuación 2.26 en la Ecuación 2.45 se obtiene que:

$$-\ddot{\mathbf{U}}^T \int_{\Omega} \rho \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} dV - \mathbf{U}^T \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{B}} dV + \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} dV + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{f}^T \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} dA = \mathbf{0}. \quad (2.46)$$

Trasponiendo la expresión anterior y ordenando los términos se obtiene:

$$\left[\int_{\Omega} \rho \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}} dV \right] \ddot{\mathbf{U}} + \left[\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{B}} dV \right] \mathbf{U} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega_f} \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} dA. \quad (2.47)$$

Es usual en el manejo de los elementos finitos utilizar la expresión anterior elemento a elemento.

$$\left[\int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}_{\mathbf{u}} dV \right] \ddot{\mathbf{U}} + \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{U} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} dA \quad (2.48)$$

Cabe destacarse que al ensamblar las matrices de rigidez, ver Sección 2.3.2, solo es necesario calcular la integral de $\mathbf{N}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}$ en la superficie $\partial\Omega_e \cap \partial\Omega_f$.

Fuerzas puntuales En el análisis anterior no se consideraron fuerzas “puntuales”. Dado que son utilizadas para el caso de barras y pórticos aceptaremos que la expresión en tal caso será:

$$\left[\int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}_{\mathbf{u}} dV \right] \ddot{\mathbf{U}} + \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{U} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} dA + \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{F}_{p,i}, \quad (2.49)$$

donde i representa cada nodo donde existen fuerzas puntuales aplicadas (ver Sección 2.3 y apunte teórico de vigas).

Una expresión usual y simple para la ecuación de un elemento es la que sigue:

$$\boxed{\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}^e \mathbf{U} = \mathbf{F}_{\mathbf{b}}^e + \mathbf{F}_{\mathbf{f}}^e + \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^e}, \quad (2.50)$$

donde:

$$\mathbf{M}^e = \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}_{\mathbf{u}} dV, \quad \mathbf{K}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (2.51)$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{b}}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} dV, \quad \mathbf{F}_{\mathbf{f}}^e = \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} dA, \quad \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^e = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{F}_{p,i}. \quad (2.52)$$

2.3. Elemento finito de barra de dos nodos 3D

Consideraremos piezas cuya sección transversal posea dimensiones mucho menores que la longitud de las mismas, que llamaremos barras. Por tanto, idealizaremos a una barra como un elemento unidimensional, ilustrando esta idealización en la Figura 2.2.

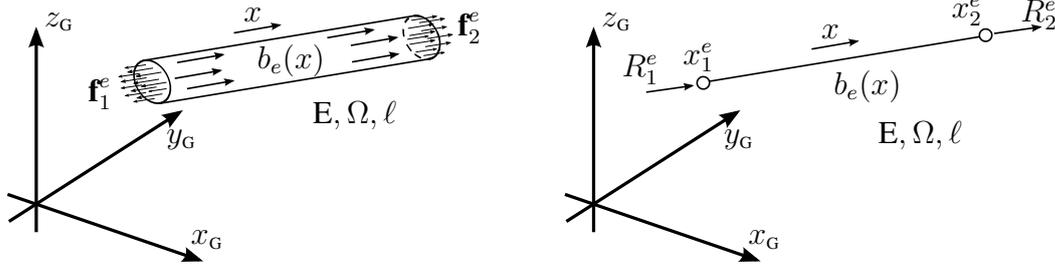


Figura 2.2: Idealización de una barra.

En la Figura 2.3 se muestra una barra con una carga de volumen $b_e(x)\mathbf{e}_x$ donde x está definido en el intervalo $I_e = [x_1^e, x_2^e]$. R_1^e y R_2^e pueden interpretarse como fuerzas de contacto o fuerzas puntuales externas aplicadas en los extremos de la barra. Por la definición de barra diremos que

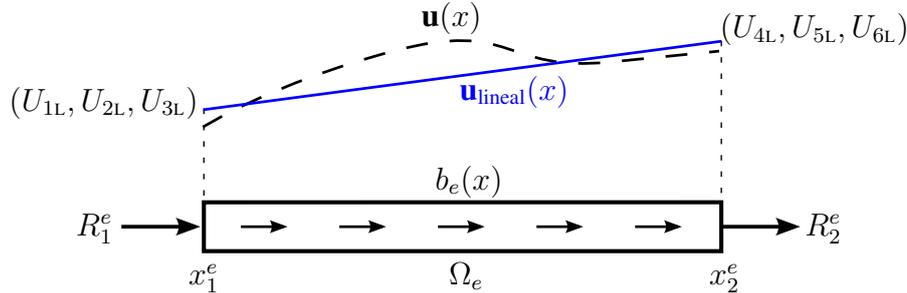


Figura 2.3: Elemento de barra.

$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{u}(x, 0, 0)$. Las coordenadas (x, y, z) serán llamadas coordenadas locales y la base ortonormal $\mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ será llamada base local (donde \mathbf{e}_x es colineal al eje de la barra). En esta sección se interpolará el campo de desplazamientos linealmente, y obtendremos entonces una solución $\mathbf{u}_{\text{lineal}}(x)$ que en principio es aproximada. Dado que se utilizan dos nodos diremos que:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{N}_u \mathbf{U}_L = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & N_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(x) & 0 & 0 & N_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(x) & 0 & 0 & N_2(x) \end{bmatrix} \mathbf{U}_L \quad (2.53)$$

donde $\mathbf{U}_L = [U_{1L} \ U_{2L} \ U_{3L} \ U_{4L} \ U_{5L} \ U_{6L}]^T$ son los desplazamientos nodales (en coordenadas locales), en principio desconocidos, y $N_1(x)$ y $N_2(x)$ son las funciones de interpolación utilizadas para la interpolación del campo de desplazamientos en el elemento ($N \neq \tilde{N}$).

Impondremos que $N_1(x_1^e) = N_2(x_2^e) = 1$ y $N_1(x_2^e) = N_2(x_1^e) = 0$ con lo cual:

$$N_1(x) = \frac{x - x_2^e}{x_1^e - x_2^e}, \quad N_2(x) = \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e}. \quad (2.54)$$

En barras se tiene que:

$${}_{\mathcal{B}_L} \mathbf{T}(x)_{\mathcal{B}_L} = \begin{pmatrix} T_{11}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow {}_{\mathcal{B}_L} \mathbf{D}(x)_{\mathcal{B}_L} = \begin{pmatrix} D_{11}(x) & 0 & 0 \\ 0 & D_{22}(x) & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}(x) \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Omitiremos la notación ${}_{\mathcal{B}} \mathbf{T}(x)_{\mathcal{B}}$, utilizando simplemente $\mathbf{T}_{\mathcal{B}}$, lo mismo con el tensor $\mathbf{D}_{\mathcal{B}}$

$$\Rightarrow U_0 = \frac{1}{2} \mathbf{T}_{\mathcal{B}_L} : \mathbf{D}_{\mathcal{B}_L} \Rightarrow \frac{1}{2} \text{tr} (\mathbf{D}_{\mathcal{B}_L}^T \mathbf{T}_{\mathcal{B}_L}) = \frac{1}{2} D_{11}(x) T_{11}(x). \quad (2.56)$$

Con lo anterior podemos ver que solo nos interesa la entrada (1,1) de los tensores $\mathbf{T}_{\mathcal{B}_L}$ y $\mathbf{D}_{\mathcal{B}_L}$ para resolver nuestro problema. Utilizando la ecuación constitutiva, se obtiene: $T_{11}(x) = \mathbf{E}(x) D_{11}(x)$ y por la relación de deformaciones y desplazamientos se cumple que:

$$D_{11}(x) = \frac{\partial u_x}{\partial x}(x) = \frac{\partial}{\partial x} (N_1(x)U_{1L} + N_2(x)U_{4L}) = \frac{\partial N_1}{\partial x}(x)U_{1L} + \frac{\partial N_2}{\partial x}(x)U_{4L}, \quad (2.57)$$

$$D_{11}(x) = B_1(x)U_{1L} + B_2(x)U_{4L} = \mathbf{B}U_L, \quad (2.58)$$

donde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(x)}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2(x)}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Para introducir en el modelo la fuerza de volumen $b_e(x)$ existen diferentes métodos, se puede ver (con la mismas funciones de interpolación de desplazamientos u otras) o utilizar otros métodos para el cálculo numérico de \mathbf{F}_b^e , por ejemplo cuadratura de Gauss.

Si observamos las expresiones de las Ecuaciones 2.51-2.52 se puede observar que al realizar las integrales en cada uno de los dominios que se definen, para cada elemento utilizado serían en principio diferentes las matrices obtenidas aunque utilicemos las mismas funciones de interpolación para cada elemento. Es de interés entonces construir un cambio de variable (cambio de variable) que permita realizar los cálculos de dichas expresiones de forma genérica y sencilla. Como muestra la Figura 2.4 podemos utilizar una transformación de variable, que lleva el intervalo $I_0 = [-1, 1]$ en el intervalo $I_e = [x_1^e, x_2^e]$ correspondiente al elemento número e . La transformación de variable será entonces dada por la función $\hat{x} : I_0 \rightarrow I_e$ que puede expresarse en la forma:

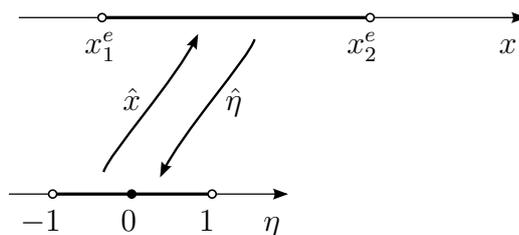


Figura 2.4: Elemento lineal.

En general es de interés utilizar una transformación simple, tal como una lineal. Esto es:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= a \hat{\eta} + b, \\ \hat{x}(-1) &= x_1^e, \quad \hat{x}(1) = x_2^e, \\ a &= \frac{x_2^e - x_1^e}{2} = \frac{\ell}{2}, \quad b = \frac{x_2^e + x_1^e}{2}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Esta transformación será útil para realizar todas las integrales en el intervalo $[-1, 1]$. En el caso que se defina esta transformación utilizando las mismas funciones de interpolación N_1 y N_2 se dirá que se utiliza un *elemento isoparamétrico* y se llamarán *funciones de forma* a N_1 y N_2 . Será de utilidad obtener la derivada de la función \hat{x} (Jacobiana del cambio de variable) y de su inversa $\hat{\eta}$:

$$\mathbf{J} = \frac{d\hat{x}}{d\eta}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{d\hat{\eta}}{dx}. \quad (2.61)$$

Las Ecuaciones 2.51-2.52 (sin considerar en este capítulo la matriz de masa) pueden calcularse de la forma:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dV = \int_{I_e} \mathbf{E} \Omega \mathbf{B}^T \mathbf{B} \, dx = \int_{I_0} J_0 \mathbf{E} \Omega \mathbf{B}^T \mathbf{B} \, d\eta \quad (2.62)$$

$$\mathbf{F}_b^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} \, dV = \int_{I_e} \Omega \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} \, dx = \int_{I_0} J_0 \Omega \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} \, d\eta \quad (2.63)$$

$$\mathbf{F}_p = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{F}_{p,i} = [R_1^e, 0, 0, 0, 0, 0]^T + [0, 0, 0, R_2^e, 0, 0]^T \quad (2.64)$$

donde J_0 es el determinante de la matriz Jacobiana (llamado Jacobiano) del cambio de variable dado por $J_0 = |\mathbf{J}|$, en este caso $J_0 = \ell/2$. Se utilizó también que la densidad ρ es uniforme en Ω_e . Utilizando el cambio de variable definido en la Ecuación 2.60 en la expresión de las funciones de interpolación definidas en la Ecuación 2.54 se obtiene que:

$$N_1(\eta) = \frac{1 - \eta}{2}, \quad N_2(\eta) = \frac{1 + \eta}{2}, \quad (2.65)$$

y para las derivadas

$$\mathbf{B} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\eta)}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2(\eta)}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\ell} [-1, 0, 0, 1, 0, 0]. \quad (2.66)$$

Es común realizar una interpolación de la función \mathbf{b} en el elemento, en particular con la mismas funciones de interpolación que se utilizan para el campo de desplazamientos, supongamos entonces que $b_e(x)$ es una fuerza de volumen lineal en el elemento, con lo cual sería exacto aproximarla como $b_e(x) = N_1(x)b_1 + N_2(x)b_2 \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{N}_u \mathbf{b}_e$ con

$$\mathbf{b}_e = [b_1 \quad 0 \quad 0 \quad b_2 \quad 0 \quad 0]^T, \quad (2.67)$$

por lo tanto la Ecuación 2.63 tiene la expresión:

$$\mathbf{F}_b^e = \int_{I_0} J_0 \Omega \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} \, d\eta = \int_{I_0} J_0 \Omega \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u \, d\eta \mathbf{b}_e. \quad (2.68)$$

Utilizando la expresión de la Ecuación 2.62 junto con la Ecuación 2.66 se tiene la expresión de la matriz de rigidez del elemento \mathbf{K}^e :

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \frac{1}{\ell^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{K}^e = \frac{E\Omega}{\ell} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

donde se supuso que E y Ω no varían a lo largo de la barra.

$$\mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1-\eta)^2 & 0 & 0 & 1-\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\eta)^2 & 0 & 0 & 1-\eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\eta)^2 & 0 & 0 & 1-\eta^2 \\ 1-\eta^2 & 0 & 0 & (1+\eta)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\eta^2 & 0 & 0 & (1+\eta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\eta^2 & 0 & 0 & (1+\eta)^2 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

por lo tanto:

$$\mathbf{F}_b^e = \frac{\Omega \ell}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } b_1 = b_2 = b \Rightarrow \mathbf{F}_b^e = b \frac{\Omega \ell}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

Ejercicio 2.1. ¿Qué modificaciones se deben realizar a los cálculos antes propuestos en caso de que el área de la sección y/o el material de la barra variaran a lo largo de la misma?

2.3.1. Cambio de coordenadas

Es de interés obtener los desplazamientos nodales en un sistema de coordenadas globales. Para esto debe realizarse un cambio de coordenadas, entre \mathcal{B}_L y $\mathcal{B}_G = \{\mathbf{e}_{x_G}, \mathbf{e}_{y_G}, \mathbf{e}_{z_G}\}$. Es preciso utilizar el concepto de cambio de base:

$$\text{coord}_{\mathcal{B}_G}(\mathbf{x}) = {}_{\mathcal{B}_G} (I)_{\mathcal{B}_L} \text{coord}_{\mathcal{B}_L}(\mathbf{x}). \quad (2.72)$$

Donde I es la transformación identidad. La i -ésima columna de la matriz ${}_{\mathcal{B}_G} (I)_{\mathcal{B}_L}$ son las coordenadas del i -ésimo elemento de la base \mathcal{B}_L en la base \mathcal{B}_G . Puede ser útil entonces utilizar el esquema representado en la siguiente imagen.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \frac{(x_{2G}, y_{2G}, z_{2G}) - (x_{1G}, y_{1G}, z_{1G})}{\ell} = \frac{(x_{2G} - x_{1G}) \mathbf{e}_{x_G} + (y_{2G} - y_{1G}) \mathbf{e}_{y_G} + (z_{2G} - z_{1G}) \mathbf{e}_{z_G}}{\ell} \\ &= \frac{\Delta x}{\ell} \mathbf{e}_{x_G} + \frac{\Delta y}{\ell} \mathbf{e}_{y_G} + \frac{\Delta z}{\ell} \mathbf{e}_{z_G}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

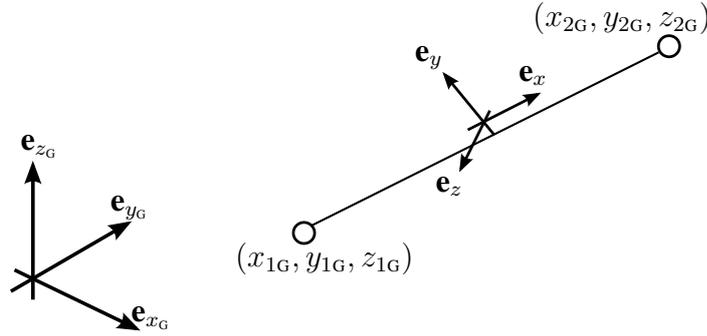


Figura 2.5: Elemento de barra - cambio de base.

Por lo tanto podemos decir que:

$$\text{coord}_{\mathcal{B}_G}(\mathbf{e}_x) = \frac{(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)^T}{l} \quad (2.74)$$

Para el caso de barras las restantes componentes de la base \mathcal{B}_L son arbitrarias, por tanto podemos definir las con la única condición de que dicha base sea ortonormal:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_y &= -\frac{\Delta_y}{l_{xy}} \mathbf{e}_{x_G} + \frac{\Delta_x}{l_{xy}} \mathbf{e}_{y_G} + 0 \mathbf{e}_{z_G}, \\ \mathbf{e}_z &= -\frac{\Delta_x \Delta_z}{l_{xy} l} \mathbf{e}_{x_G} - \frac{\Delta_y \Delta_z}{l_{xy} l} \mathbf{e}_{y_G} + \frac{l_{xy}}{l} \mathbf{e}_{z_G}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

siendo $l = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2}$ y $l_{xy} = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}$ la proyección de l en el plano $z_G = 0$. Para lo anterior se supone que $l_{xy} \neq 0$. No necesariamente siempre debe cumplirse que $l_{xy} \neq 0$, en tal caso se define

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_{z_G}, \quad \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_{x_G}, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_{y_G}. \quad (2.76)$$

Por lo anterior:

$$\text{Si } \Delta_x^2 = \Delta_y^2 = 0$$

$$\mathcal{B}_G(I)_{\mathcal{B}_L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

en el caso contrario

$$\mathcal{B}_G(I)_{\mathcal{B}_L} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_x}{l} & -\frac{\Delta_y}{l_{xy}} & -\frac{\Delta_x \Delta_z}{l_{xy} l} \\ \frac{\Delta_y}{l} & \frac{\Delta_x}{l_{xy}} & -\frac{\Delta_y \Delta_z}{l_{xy} l} \\ \frac{\Delta_z}{l} & 0 & \frac{l_{xy}}{l} \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

Diremos entonces que el vector de desplazamientos generalizados \mathbf{U}_G en las coordenadas globales y el vector de fuerzas \mathbf{F}_G en las coordenadas globales son:

$$\mathbf{U}_G = \mathbf{Q} \mathbf{U}_L, \quad \mathbf{F}_G = \mathbf{Q} \mathbf{F}_L, \quad (2.79)$$

donde

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_G(I)_{\mathcal{B}_L} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathcal{B}_G(I)_{\mathcal{B}_L} \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

\mathbf{Q} es ortogonal con lo cual $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$. Cabe destacar que para cada elemento debe calcularse un \mathbf{Q} diferente. Con lo anterior se tiene que la expresión en coordenadas globales de la Ecuación 2.50 es:

$$\mathbf{Q} \mathbf{K}_L^e \mathbf{Q}^T \mathbf{U}_G = \mathbf{F}_{bG}^e + \mathbf{F}_{p,G}, \quad (2.81)$$

equivalente a:

$$\mathbf{K}_G^e \mathbf{U}_G = \mathbf{F}_{bG}^e + \mathbf{F}_{p,G}. \quad (2.82)$$

2.3.2. Grados de libertad y ensamblaje de matriz de rigidez

Es claro que en coordenadas globales \mathbf{U}_G en principio tiene 6 valores desconocidos, 3 por cada nodo del elemento, podemos entonces introducir el concepto de grado de libertad nodal. Diremos, en el caso de barras, que cada nodo tiene n_D grados de libertad, siendo n_D la dimensión que estemos considerando (3, 2 o 1). Para este caso cada elemento tendrá $n_D n_{\text{nod}}$, siendo n_{nod} la cantidad de nodos que tenga el elemento.

Es importante utilizar entonces el concepto de grado de libertad del elemento para la interpretación de las matrices \mathbf{M}_G^e y \mathbf{K}_G^e . Para la matriz \mathbf{K}_G^e diremos que las entradas ij representan una rigidez que relaciona una fuerza aplicada en el grado de libertad i con un desplazamiento en el grado de libertad j .

En los casos en que tengamos más de una barra es aún más importante este concepto debido a que los grados de libertad nos permitirán fácilmente obtener la matriz de rigidez y de masa de toda la estructura.

Supongamos tenemos una estructura como se muestra en la Figura 2.6. La misma esta incluida en el plano $z = 0$ y por tanto se podría trabajar como un problema plano (será abordado como un problema en 3 dimensiones igualmente). Cada nodo tendrá 3 grados de libertad y cada elemento tendrá 6 grados de libertad, los cuales pueden enumerarse a continuación:

- $\text{gdl}_{\text{nod}_1} = (1, 2, 3)$, $\text{gdl}_{\text{nod}_2} = (4, 5, 6)$ y $\text{gdl}_{\text{nod}_3} = (7, 8, 9)$
- $\text{gdl}_{\text{elem}_1} = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ y $\text{gdl}_{\text{elem}_2} = (4, 5, 6, 7, 8, 9)$

De forma genérica podrían calcularse los grados de libertad del nodo i como:

$$\begin{aligned} \text{Si } n_D = 3 &\Rightarrow \text{gdl}_{\text{nod}_i} = (n_D i - 2, n_D i - 1, n_D i) \\ \text{Si } n_D = 2 &\Rightarrow \text{gdl}_{\text{nod}_i} = (n_D i - 1, n_D i) \\ \text{Si } n_D = 1 &\Rightarrow \text{gdl}_{\text{nod}_i} = n_D i \end{aligned} \quad (2.83)$$

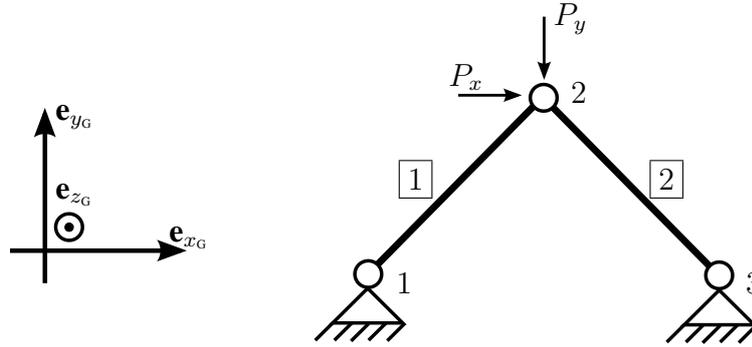


Figura 2.6: 2 elementos de barra.

Los grados de libertad de un elemento dependen de los grados de libertad de los nodos que se encuentran en él y de la orientación del elemento, supongamos que el nodo inicial del elemento j es i_j y el final es f_j , se tiene así que:

$$\text{gdl}_{\text{elem}_j} = \left(\text{gdl}_{\text{nod}_{i_j}}, \text{gdl}_{\text{nod}_{f_j}} \right) \quad (2.84)$$

Con la numeración antes vista se pueden escribir las ecuaciones de rigidez de cada elemento como sigue, elemento 1:

$$\mathbf{K}_G^1 \mathbf{U}_G^1 = \begin{pmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & K_{15}^1 & K_{16}^1 \\ K_{12}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & K_{25}^1 & K_{26}^1 \\ K_{13}^1 & K_{23}^1 & K_{33}^1 & K_{34}^1 & K_{35}^1 & K_{36}^1 \\ K_{14}^1 & K_{24}^1 & K_{34}^1 & K_{44}^1 & K_{45}^1 & K_{46}^1 \\ K_{15}^1 & K_{25}^1 & K_{35}^1 & K_{45}^1 & K_{55}^1 & K_{56}^1 \\ K_{16}^1 & K_{26}^1 & K_{36}^1 & K_{46}^1 & K_{56}^1 & K_{66}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1G} \\ U_{2G} \\ U_{3G} \\ U_{4G} \\ U_{5G} \\ U_{6G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1G}^1 \\ F_{2G}^1 \\ F_{3G}^1 \\ F_{4G}^1 \\ F_{5G}^1 \\ F_{6G}^1 \end{pmatrix} = \mathbf{F}_G^1, \quad (2.85)$$

elemento 2:

$$\mathbf{K}_G^2 \mathbf{U}_G^2 = \begin{pmatrix} K_{44}^2 & K_{45}^2 & K_{46}^2 & K_{47}^2 & K_{48}^2 & K_{49}^2 \\ K_{45}^2 & K_{55}^2 & K_{56}^2 & K_{57}^2 & K_{58}^2 & K_{59}^2 \\ K_{46}^2 & K_{56}^2 & K_{66}^2 & K_{67}^2 & K_{68}^2 & K_{69}^2 \\ K_{47}^2 & K_{57}^2 & K_{67}^2 & K_{77}^2 & K_{78}^2 & K_{79}^2 \\ K_{48}^2 & K_{58}^2 & K_{68}^2 & K_{78}^2 & K_{88}^2 & K_{89}^2 \\ K_{49}^2 & K_{59}^2 & K_{69}^2 & K_{79}^2 & K_{89}^2 & K_{99}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{4G} \\ U_{5G} \\ U_{6G} \\ U_{7G} \\ U_{8G} \\ U_{9G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{4G}^2 \\ F_{5G}^2 \\ F_{6G}^2 \\ F_{7G}^2 \\ F_{8G}^2 \\ F_{9G}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{F}_G^2 \quad (2.86)$$

Usando de factor común los términos U_{4G} , U_{5G} y U_{6G} se puede obtener la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & K_{15}^1 & K_{16}^1 & 0 & 0 & 0 \\ K_{12}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & K_{25}^1 & K_{26}^1 & 0 & 0 & 0 \\ K_{13}^1 & K_{23}^1 & K_{33}^1 & K_{34}^1 & K_{35}^1 & K_{36}^1 & 0 & 0 & 0 \\ K_{14}^1 & K_{24}^1 & K_{34}^1 & K_{44}^1 + K_{44}^2 & K_{45}^1 + K_{45}^2 & K_{46}^1 + K_{46}^2 & K_{47}^2 & K_{57}^2 & K_{67}^2 \\ K_{15}^1 & K_{25}^1 & K_{35}^1 & K_{45}^1 + K_{45}^2 & K_{55}^1 + K_{55}^2 & K_{56}^1 + K_{56}^2 & K_{48}^2 & K_{58}^2 & K_{68}^2 \\ K_{16}^1 & K_{26}^1 & K_{36}^1 & K_{46}^1 + K_{46}^2 & K_{56}^1 + K_{56}^2 & K_{66}^1 + K_{66}^2 & K_{49}^2 & K_{59}^2 & K_{69}^2 \\ 0 & 0 & 0 & K_{47}^2 & K_{57}^2 & K_{67}^2 & K_{77}^2 & K_{78}^2 & K_{79}^2 \\ 0 & 0 & 0 & K_{48}^2 & K_{58}^2 & K_{68}^2 & K_{78}^2 & K_{88}^2 & K_{89}^2 \\ 0 & 0 & 0 & K_{49}^2 & K_{59}^2 & K_{69}^2 & K_{79}^2 & K_{89}^2 & K_{99}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1G} \\ U_{2G} \\ U_{3G} \\ U_{4G} \\ U_{5G} \\ U_{6G} \\ U_{7G} \\ U_{8G} \\ U_{9G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1G}^1 \\ F_{2G}^1 \\ F_{3G}^1 \\ F_{4G}^1 + F_{4G}^2 \\ F_{5G}^1 + F_{5G}^2 \\ F_{6G}^1 + F_{6G}^2 \\ F_{7G}^2 \\ F_{8G}^2 \\ F_{9G}^2 \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

El vector de fuerzas nodales puede traducirse en:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_G &= (F_{1G}^1, F_{2G}^1, F_{3G}^1, F_{4G}^1 + F_{4G}^2, F_{5G}^1 + F_{5G}^2, F_{6G}^1 + F_{6G}^2, F_{7G}^2, F_{8G}^2, F_{9G}^2)^T \\ &= (R_{1G}, R_{2G}, R_{3G}, P_x, -P_y, 0, R_{7G}, R_{8G}, R_{9G})^T, \end{aligned} \quad (2.88)$$

siendo así expresado en términos de las reacciones en los apoyos, R_{iG} , y las fuerzas externas sobre la estructura. Se tiene entonces un sistema de ecuaciones que se puede representar como $\mathbf{K}_G \mathbf{U}_G = \mathbf{F}_G$. Por lo dicho en la Sección 2.2.1, “donde se conocen los desplazamientos no se conocen las fuerzas de superficie y viceversa”, las entradas 1, 2, 3, 7, 8 y 9 de \mathbf{U}_G deben ser conocidas. En este caso es claro ver que dichas entradas deben ser nulas debidas al apoyo fijo, con lo cual:

$$\mathbf{U}_G = (0, 0, 0, U_{4G}, U_{5G}, U_{6G}, 0, 0, 0)^T \quad (2.89)$$

En el sistema de la Ecuación 2.87 la matriz \mathbf{K}_G es no invertible, su determinante es nulo, esto puede verse utilizando las expresiones de las Ecuaciones 2.69 y 2.80. Al imponer las condiciones de borde, dadas por la Ecuación 2.89 se obtiene lo que llamaremos sistema reducido que si es compatible determinado:

$$\begin{pmatrix} K_{44}^1 + K_{44}^2 & K_{45}^1 + K_{45}^2 & K_{46}^1 + K_{46}^2 \\ K_{45}^1 + K_{45}^2 & K_{55}^1 + K_{55}^2 & K_{56}^1 + K_{56}^2 \\ K_{46}^1 + K_{46}^2 & K_{56}^1 + K_{56}^2 & K_{66}^1 + K_{66}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{4G} \\ U_{5G} \\ U_{6G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ -P_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

A los grados de libertad 4, 5 y 6 se los llama “grados de libertad libres” y a los restantes “grados de libertad fijos” o más genéricamente “grados de libertad conocidos”.

2.3.3. Utilización de Octave

A continuación a modo de ejemplo, se resolverá una estructura isostática de simple resolución por diversos métodos. La geometría de la misma se detalla en la Figura 2.7, las barras 1, 2 y 3 pertenecen a un tetraedro regular de arista de largo ℓ . Todas las barras tienen la misma sección Ω y están constituidas del mismo material de módulo de Young E . En el nodo 3, único con coordenadas z diferente de 0, se aplica una carga de valor P orientada según la Figura 2.7 (según $-\mathbf{e}_{zG}$).

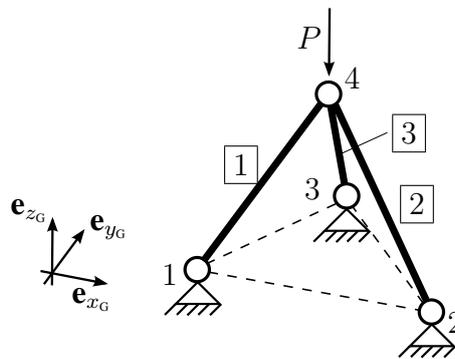


Figura 2.7: Ejemplo utilizando Octave.

Utilizando el principio del trabajo virtual se puede obtener el desplazamiento vertical del nodo 4 de forma sencilla:

$$v = \frac{1}{2} \frac{P\ell}{E\Omega} \quad \text{según } -\mathbf{e}_{z_G}, \quad (2.91)$$

si $P = 10 \text{ kN}$, $\ell = 1 \text{ m}$, $E = 200 \text{ GPa}$ y $\Omega = 0.01 \text{ m}^2$ se tiene que:

$$v = 2.5 \times 10^{-6} \text{ m} \quad \text{según } -\mathbf{e}_{z_G}. \quad (2.92)$$

Para la realización del `script` en Octave, se deben definir las coordenadas de todos los nodos y la conectividad de los mismos:

```
% Materiales: Todas las barras el mismo material
E = 200e9; % 200 GPa = 200000000 N/m2

% Sección: Todas las barras con la misma sección
A = 0.01; % 0.01m2
L = 1; % 1m
```

```
% Coordenadas de los 4 nodos:
%      X(m)      Y(m)      Z(m)
Mnod = [ 0      0      0;...
         L      0      0;...
         L/2    L*sqrt(3)/2    0;...
         L/2    L/(2*sqrt(3))    sqrt(2)/sqrt(3)];
```

```
% Matriz de conectividad:
%      Ninicial Nfinal
Mconect = [ 1      4;...
            2      4;...
            3      4];
```

A continuación se deben calcular las matrices de giro para cada barra, la matriz de rigidez en coordenadas globales para cada una de ellas y el posterior ensamblado de las mismas en la matriz de rigidez global de la estructura. Una estructura de barras de n nodos (en las que se utilicen elementos de 2 nodos) tendrá una matriz de rigidez de tamaño $3n \times 3n$.

```
% Definimos el tamaño de la matriz global total KG:
KG = zeros(3*4,3*4);
for elem = 1:3
    %
    Ni = Mconect(elem,1); Nf = Mconect(elem,2); %Nodo inicial y final del elemento
    % Coordenadas del elemento y largo del mismo
    X_elem = [Mnod(Ni,1),Mnod(Nf,1)]; Y_elem = [Mnod(Ni,2),Mnod(Nf,2)]; Z_elem = [Mnod(Ni,3),Mnod(Nf,3)];
    DeltaX = X_elem(2)-X_elem(1); DeltaY = Y_elem(2)-Y_elem(1); DeltaZ = Z_elem(2)-Z_elem(1);
    l = sqrt( DeltaX^2 + DeltaY^2 + DeltaZ^2 ); l_xy = sqrt( DeltaX^2 + DeltaY^2 );
    %
    % Grados de libertad del elemento
    gdlelem = [3*Ni-2 3*Ni-1 3*Ni 3*Nf-2 3*Nf-1 3*Nf];
    %
    % se calcula la matriz cambio de base
    if l_xy == 0
        %
        Icb = [0 1 0; 0 0 1; 1 0 0];
        %
    else
        %
        Icb = [ DeltaX/l    -DeltaY/l_xy -DeltaX*DeltaZ/l_xy/l;...
              0          DeltaX/l     DeltaY/l_xy/l_xy/l;...
              DeltaY/l_xy DeltaZ/l_xy -DeltaX*DeltaZ/l_xy/l;...
              -DeltaY/l_xy DeltaZ/l_xy 0;...
              0          0          0;...
              0          0          0];
    end
    %
    KG(gdlelem,gdlelem) = KG(gdlelem,gdlelem) + Icb * E * A / l;
```

```

        DeltaY/l      DeltaX/l_xy -DeltaY*DeltaZ/l_xy/l;...
        DeltaZ/l      0          l_xy/l];
    %
end
% Matriz de giro
O = zeros(3,3); % Matriz de ceros de 3x3
Q = [Icb  0;...
     0 Icb];
%
% Matriz de rigidez del elemento en coordenadas locales:
KLelem = E*A/l*[ 1 0 0 -1 0 0; 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0;...
                -1 0 0 1 0 0; 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0];
% Matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales:
KGelem = Q*KLelem*Q';
% Alocamos la matriz KGelem en el lugar correspondiente en KG
KG(gdlelem,gdlelem) = KG(gdlelem,gdlelem) + KGelem ;
%
end

```

En lo anterior se utilizaron las expresiones ya definidas en la Sección 2.3. A continuación se resuelve el sistema lineal en función de los “grados de libertad libres” de la estructura.

```

% Se definen los grados de libertad fijos/conocidos
% Los nodos 1, 2 y 3 están apoyados por tanto:
gdlfijos = [1 2 3 4 5 6 7 8 9];
% Los grados de libertad libres son los restantes
gdllibres = [1:3*4];
gdllibres(gdlfijos) = []; % sacamos los fijos
% Matriz reducida:
Kreducida = KG(gdllibres,gdllibres);
% Definimos el vector de fuerzas nodales externas:
F = [0 0 -10000]'; % 10000N en dirección -e_z
%
Ulibres = Kreducida\F;
Utotal = zeros(3*4,1); %los desplazamientos conocidos son ceros en este caso
Utotal(gdllibres) = Ulibres;
%
Ftotal = KG*Utotal;
%
% Reacciones en apoyos:
R = Ftotal(gdlfijos);

```

Luego de compilar el script en Octave se puede utilizar en la consola el comando `Utotal(12)` para obtener el desplazamiento vertical del nodo 4.

```

octave:22> Utotal(12)
ans = -2.5000e-006

```

Ejercicio 2.2. Junto con el script presentado en la Sección 2.3.3 realice el gráfico de la configuración indeformada y deformada de la estructura dada por la Figura 2.7. Utilice la función `plot` de Octave. En caso de que el material de cada barra fuera diferente, ¿cómo modificaría el script? (considere que el material es uniforme en ambas barras).

2.4. Elemento finito de barra de tres nodos 3D

Imaginemos el problema de la Figura 2.3 pero que a diferencia de lo presentado en la Sección 2.3 buscamos una interpolación cuadrática del campo \mathbf{u}^1 . Es intuitivo imaginar que utilizaremos entonces polinomios de interpolación N_i cuadráticos, he aquí que no es suficiente con las condiciones que se impusieron para obtener la Ecuación 2.54 dado que cada una de las funciones será de la forma:

$$N_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad (2.93)$$

Se necesita incluir un nuevo nodo en el elemento, de forma de imponer tres condiciones para cada función de interpolación y por tanto la necesidad de tres funciones de interpolación. Es usual utilizar como tercer nodo al punto medio de la barra, aunque esto no es necesario.

Se tiene entonces que:

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & N_3(x) & 0 & 0 & N_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(x) & 0 & 0 & N_3(x) & 0 & 0 & N_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(x) & 0 & 0 & N_3(x) & 0 & 0 & N_2(x) \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

No en tanto se utilizará el mismo cambio de variable definido en la Ecuación 2.60, por lo que en este caso no hablaremos de *funciones de forma* para referirnos a N_i .

Ejercicio 2.3. Demostrar que las funciones de interpolación para el elemento finito de barra de tres nodos, con el tercer nodo siendo el punto medio de la barra, en función de η (ver Figura 2.4) son:

$$N_1(\eta) = \frac{(\eta - 1)\eta}{2} \quad N_2(\eta) = (1 - \eta)(\eta + 1) \quad N_3(\eta) = \frac{(\eta + 1)\eta}{2} \quad (2.95)$$

Notar que para el caso de elementos de barra de dos nodos 3D la cantidad de elementos no influye directamente en el tamaño de la matriz de rigidez, en el caso de elementos de barra de tres nodos 3D sí.

Ejercicio 2.4. ¿Cuál es el tamaño de una matriz de rigidez de una estructura reticulada con n nodos y e elementos utilizando elementos de barra de tres nodos 3D? ¿y de cuatro nodos por barra?.

Ejercicio 2.5. Obtener la matriz de rigidez y de masa para el caso de elementos de barra de tres nodos 3D. ¿Cómo cambia la matriz de giro \mathbf{Q} ?

Para el caso de elementos de barra de tres nodos 3D el ensamblaje de la matriz de rigidez de toda la estructura es conceptualmente igual al ejemplificado en la Sección 2.3.2.

Ejercicio 2.6. Modificar el script presentado en la Sección 2.3.3 para el caso de elementos de barra de tres nodos 3D.

¹Puede ser de utilidad cuando existen fuerzas de volumen a modo de obtener una solución exacta de la ecuación de Navier, ver Canelas [2013, 2014].

Bibliografía

- A. Canelas. *Apuntes de curso de Elasticidad*. Instituto de Estructuras y Transporte Prof. Julio Ricaldoni, 2013.
- A. Canelas. *Apuntes de curso de Elasticidad*. Instituto de Estructuras y Transporte Prof. Julio Ricaldoni, 2014.
- E. Oñate. *Structural Analysis with the Finite Element Method Linear Statics*, volume 2 of *Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences*. Springer Netherlands, Dordrecht, 2013. ISBN 978-1-4020-8742-4. doi: 10.1007/978-1-4020-8743-1.
- S. S. Rao. *The finite element method in engineering*. Elsevier Science & Technology Books, December 2004. ISBN 0750678283.
- S. R. Wu and L. Gu. *Introduction to the explicit finite element method for nonlinear transient dynamics*. Wiley, 2012.