

# Examen - Métodos Numéricos

Lunes 15 de Diciembre de 2014

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

## Problema 1 (35 puntos)

- Definir orden de convergencia de una sucesión  $\{x_n\}$ .
- Sea  $g(x) = x$  una ecuación, con  $\alpha$  punto fijo de  $g(\cdot)$ . Asumiendo  $g(\cdot)$  continua y con  $p \geq 1$  derivadas continuas en un entorno de  $\alpha$ , y además que  $\frac{d^k g}{dx^k}(\alpha) = 0$ ,  $\forall k \in 1..p-1$ ,  $\frac{d^p g}{dx^p}(\alpha) \neq 0$ , demostrar que el orden de convergencia del MIG es  $p$ , con constante  $\beta = \frac{1}{p!} \left| \frac{d^p g}{dx^p}(\alpha) \right|$ .
- Deducir el Método de Newton-Raphson para resolver una ecuación  $f(x) = 0$ , con  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Sea  $f(x)$  con derivada segunda continua en un entorno de la raíz  $\alpha$  y tal que  $f'(\alpha) \neq 0$ .  
Demostrar que la sucesión generada por Newton-Raphson converge a  $\alpha$  siempre que  $x_0$  se elija suficientemente próximo, y además la convergencia es cuadrática con constante  $\beta = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$ .

## Problema 2 (35 puntos)

- Deducir la matriz de Vandermonde de un polinomio interpolante de grado  $n$ .
- Explicar el método de interpolación de Newton.
- Expresar el polinomio interpolante por los puntos:  $P = \{(0; 0); (1; 1); (2; 2); (3; 4)\}$  utilizando el método de Newton.
- Explicar el método de Hermite por intervalos que interpola en  $n$  puntos una función  $f(x)$  y su derivada  $f'(x)$  en los mismos  $n$  puntos.
- Expresar el polinomio interpolante de Hermite por intervalos de la función  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  por las abscisas  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  y  $x_2 = 2$ .

## Problema 3 (30 puntos)

Dado un Problema de Mínimos Cuadrados: (PMC)  $\min_x \|b - Ax\|_2$ , con  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , con  $m > n$ . Se pide:

- Deduzca el Sistema de Ecuaciones Normales asociado al PMC.
- Asumiendo conocida la descomposición  $LU$  de  $A^t A$  explique cómo podría utilizar dicha información para resolver  $p$  Problemas de Mínimos Cuadrados cada uno de la forma: (PMC <sub>$i$</sub> )  $\min_x \|b_i - Ax\|_2$ , con  $b_i \in \mathbb{R}^m$ ,  $i \in 1..p$ .  
Calcular en número de operaciones requeridas para resolver los  $p$  PMCs en este caso.

**Fundamentar detalladamente cada respuesta.**