Solución Examen - Métodos Numéricos

15 de Diciembre de 2014

Problema 1 (35 puntos)

a) Sea $\{x_n\}$ sucesión que converge a α. Sean $p, \beta > 0$ con $p, \beta \in R$. El orden de convergencia de la sucesión es p (y la velocidad de convergencia es β) siempre que:

$$\text{lím}_n \frac{|\alpha - x_{n+1}|}{|\alpha - x_n|^p} = \beta$$

b) Se pide demostrar el directo del teorema de "Velocidad de convergencia de un MIG". *Ver demostración en teórico.*

c) *Ver deducción en teórico.*

d) Se debe observar que Newton-Raphson es un caso particular de MIG (con $g(x) = x - \frac{f(x}{f'(x)})$, y por tanto puede aplicarse el teorema de condición suficiente de contractividad. Nos encontramos en sus hipótesis porque $|g'(\alpha)| = 0 < 1$. Por tanto la sucesión generada por Newton-Raphson converge a α siempre que x_0 se elija suficientemente próximo.

Para verificar que la convergencia es al menos cuadrática con constante $\beta = |\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}|$ se aplica el teorema de la parte b) (verificando que estamos en las hipótesis: $g'(\alpha) = 0$ y $g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \neq 0$).

Problema 2 (35 puntos)

a) El polinomio interpolante que pasa por los $n+1$ puntos:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

es un polinomio de grado n, $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ que cumple las $n+1$ condiciones:

$$P(x_i) = y_i, \;\; i = 0, 1, \ldots, n$$

Esto se traduce en un sistema lineal de $n+1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas $a_0, a_1, \ldots, a_n$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Este sistema puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes del sistema se denomina *matriz de Vandermonde* asociada a los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

b) Dados los $n+1$ puntos a interpolar: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, el método de Newton consiste en encontrar los a_i que satisfacen:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i w_i(x)$$

siendo

$$w_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ \prod_{0 \le j < i}(x - x_j) & \text{si } i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

A partir de esta base se plantea y resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{array}{ll} (x_0, y_0): & a_0 = y_0 \\ (x_1, y_1): & a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1 \\ (x_2, y_2): & a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \\ & \vdots \\ (x_n, y_n): & a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=0}^{j=i-1}(x_n - x_j) = y_n \end{array}$$

c) Para los puntos $(0,0), (1,1), (2,2), (3,4)$ el sistema queda:

$$\begin{array}{ll} (0,0): & a_0 = 0 \\ (1,1): & a_0 + a_1(1-0) = 1 \Rightarrow a_1 = 1 \\ (2,2): & a_0 + a_1(2-0) + a_2(2-0)(2-1) = 2 \Rightarrow a_2 = 0 \\ (3,4): & a_0 + a_1(3-0) + a_2(3-0)(3-1) + a_3(3-0)(3-1)(3-2) = 4 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6} \end{array}$$

Por tanto el polinomio es $P(x) = x + \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$

d) Dados los $n+1$ puntos a interpolar: $(x_0, y_0, y'_0), (x_1, y_1, y'_1), \ldots, (x_n, y_n, y'_n)$, el método de Hermite consiste en encontrar el polinomio $H_{2n+1}(x)$ que satisfaga: $H_{2n+1}(x_j) = y_j$ y $H'_{2n+1}(x_j) = y'_j$.

Este polinomio puede escribirse en función de $h_i(x)$ y $\widetilde{h}_i(x)$ según:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{i=n}(y_i h_i(x) + y'_i \widetilde{h}_i(x))$$

Siendo:

$$h_i(x) = [1 - 2l'_i(x_i)(x - x_i)](l_i(x))^2$$
$$\widetilde{h}_i(x) = (x - x_i)(l_i(x))^2$$

y $l_i(x)$ los polinomios base de Lagrange.

Puede verifcarse que estos $h_i(x)$ y $\widetilde{h}_i(x)$ cumplen con la interpolación ($H_{2n+1}(x_j) = y_j$ y $H'_{2n+1}(x_j) = y'_j$) y además:

$$h_i(x_j) = \delta_{ij} (\text{delta de Kronecker})$$
$$h'_i(x_j) = 0 \ \forall j \in 0..n$$
$$\widetilde{h}_i(x_j) = 0 \ \forall j \in 0..n$$
$$\widetilde{h}'_i(x_j) = \delta_{ij}$$

Por una explicación completa ver los detalles en teórico.

e) $f(x) = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ Por lo tanto tenemos los siguientes datos:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	0	1
1	1/2	0
2	2/5	$-3/25$

0	0					
		$f'(0) = 1$				
0	0		$\frac{\frac{1}{2}-1}{1-0} = -0{,}5$			
		$f[0,1] = 1/2$		0		
1	1/2		$\frac{0-\frac{1}{2}}{1-0} = -0{,}5$		$\frac{0{,}2-0}{2-0} = 0{,}1$	
		$f'(1) = 0$		$\frac{-0{,}1+0{,}5}{2-0} = 0{,}2$		$\frac{-0{,}06-0{,}1}{2-0} = -0{,}08$
1	1/2		$\frac{-\frac{1}{10}-0}{2-1} = -0{,}1$		$\frac{0{,}08-0{,}2}{2-0} = -0{,}06$	
		$f[1,2] = -1/10$		$\frac{-0{,}02+0{,}1}{2-1} = 0{,}08$		
2	2/5		$\frac{-\frac{3}{25}+\frac{1}{10}}{2-1} = -0{,}02$			
		$f'(2) = -3/25$				
2	2/5					

Por lo tanto el polinomio buscado es

$$P(x) = 0+1(x-0)-0{,}5(x-0)^2+0(x-0)^2(x-1)+0{,}1(x-0)^2(x-1)^2-0{,}08(x-0)^2(x-1)^2(x-2)$$

Problema 3 (30 puntos)

a) Se pide demostrar que el problema PMC se puede resolver mediante el sistema lineal de las ecuaciones normales. Es decir, la demostración del directo del teorema de caracterización de la solución en ecuaciones normales:
Datos $A \in R^{m\times n}$, $b \in R^m$, $x \in R^n$, con $m > n$. El $\widehat{x}$ que minimiza $\|b - Ax\|_2$ también verifica $A^t(A\widehat{x} - b) = 0$ *Ver demostración en teórico.*

b) Los p problemas de mínimos cuadrados ((PMC$_\text{i}$) $min_x\|b_i - Ax\|_2$, con $b_i \in R^m$, $i \in 1..p.$), se pueden resolver usando $LU = A^tA$ en las ecuaciones normales:
Se tienen que resolver p sistemas de la forma $A^tAx_i = A^tb_i$, $i \in 1..p$. Sea $\widetilde{b_i} = A^tb_i$. Al conocer la descomposicin $LU = A^tA$ tenemos p sistemas cuadrados de la forma: $LUx_i = \widetilde{b_i}$, el cual se puede descomponer en dos sistemas triangulares:

- Primero computo $Ly_i = \widetilde{b_i}$ para obtener y_i.
- Luego computo $Ux_i = y_i$ para obtener x_i

Respecto a la cantidad de operaciones (sumas/restas y productos), para cada p necesitamos computar A^tb_i (orden mn) y resolver dos sistemas triangulares (orden $n^2/2$ cada uno). Es decir, para los p sistemas se tendr un total de $p(mn+n^2)$ operaciones. (No olvidar que por hipótesis se supone conocida la descomposición LU).