Ejercicio 1.

a) El error de truncamiento se debe a que en la definición de derivada tenemos que tomar un límite con $h \to 0$, y en $\delta_2 f(a)$ lo estamos reemplazando por una expresión con h fijo. Si asumimos que podemos operar exactamente (con aritmética real), tenemos

$$e_{truncamiento} = f''(a) - \delta_2 f(a)$$

El error de redondeo se debe a que operamos con aritmética de punto flotante, y tenemos precisión finita para representar números reales. Lo podemos escribir como $e_{redondeo} = \delta_2 f(a) - \dfrac{fl(f(a+h)) - 2fl(f(a)) + fl(f(a+h))}{h^2}$.

b) Haciendo desarrollos de Taylor,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\theta_a)}{24}h^4.$$

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\gamma_a)}{24}h^4$$

$$\Rightarrow f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) = f''(a)h^2 + O(h^4).$$

$$\Rightarrow |e_{truncamiento}| = |\delta_2 f(a) - f''(a)| = O(h^2).$$

c) El error relativo al representar un número en punto flotante es menor o igual a $\varepsilon_m/2$, y por lo tanto $|fl(f(a+h)) - f(a+h)| \leq \frac{\varepsilon_m}{2}|f(a+h)|$, y análogamente para $f(a)$, $f(a-h)$. Queda:

$$|e_{redondeo}| \leq \frac{\varepsilon_m}{2h^2}\left[|f(a+h)| + 2|f(a)| + |f(a-h)|\right] \simeq \frac{2}{h^2}|f(a)|\varepsilon_m.$$

d) Tenemos $f(x) = e^x$, $a=1$. $\Rightarrow f(a) = e$. $\Rightarrow |e_{red}| \leq \frac{2}{h^2} e\, \varepsilon_M$.

En el error de truncamiento, el término $O(h^2)$ es como $\frac{2 f^{(4)}(a)}{24} h^2 \simeq \frac{e h^2}{12}$.

El paso óptimo es el h que minimiza $h \mapsto \frac{2}{h^2} e\, \varepsilon_M + \frac{e h^2}{12}$.

$$\Rightarrow h_{óptimo} \simeq \sqrt[4]{24 \varepsilon_M} \simeq \sqrt[4]{24 \cdot 2{,}2 \times 10^{-16}} \simeq 1{,}7 \times 10^{-4}$$

Ejercicio 2.

a) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $a_{ii} \neq 0 \ \forall i = 1, \dots, n$.

Descomponemos $A = D - E - F$, con D matriz diagonal, E estrictamente triangular inferior, F estrictamente triangular superior.

Jacobi. Se basa en escribir $Ax = b \Leftrightarrow Dx = (E+F)x + b$,

y tomamos $x^{k+1} := D^{-1}(E+F)x^k + D^{-1}b$.

Gauss-Seidel se basa en escribir $Ax = b \Leftrightarrow (D-E)x = Fx + b$,

y tomamos $x^{k+1} := (D-E)^{-1}Fx^k + (D-E)^{-1}b$.

Ambos métodos se inicializan con un iterado x^0 a elección.

b) Ambos métodos son iterativos y estacionarios, de la forma $x^{k+1} = Qx^k + r$.

(notar $Q = D^{-1}(E+F)$ para Jacobi, $Q = (D-E)^{-1}F$ para Gauss-Seidel).

Una condición necesaria y suficiente para que converja cualquiera de ellos es que $\rho(Q) < 1$.

c) El vector b es irrelevante para la convergencia del método.

En este caso, tenemos $Q = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & -1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3/5 \\ 8/5 & 0 \end{bmatrix}$, y sus valores propios son $\lambda = \pm\sqrt{\frac{24}{25}} \Rightarrow \rho(Q) = \sqrt{24/25} < 1$.

Por lo tanto, el método de Jacobi es convergente para A.

d) Tenemos $X^{k+1} = \omega X_J^{k+1} + (1-\omega) X^k = \omega(QX^k + r) + (1-\omega)X^k$

$$\Rightarrow X^{k+1} = \underbrace{\left[\omega Q + (1-\omega) I\right]}_{=:\tilde{Q}} X^k + \omega r.$$

Tomamos $\omega = 3/2$:

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} -1/2 & 9/10 \\ 12/5 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Queda:

$$\det(\tilde{Q} - \lambda I) = \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{108}{50} = \lambda^2 + \lambda - \frac{191}{100}$$

$\hookrightarrow \rho(\tilde{Q}) = \dfrac{1 + \sqrt{1 + \frac{191}{25}}}{2} > 1$ $\Rightarrow$ La iteración no es convergente.

Ejercicio 3. Tenemos $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \; \forall n \in \mathbb{N}$; y nodos de interpolación $x_i = i/n$, $i = 0, \dots, n$, en el intervalo $[0,1]$.

a) Usando interpolación de grado alto (p_n), el error de interpolación es

$$|f(x) - p_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\gamma_x)}{(n+1)!} (x - x_0) \cdots (x - x_n) \right| \underset{|x - x_i| \leq 1 \; \forall i}{\leq} \frac{e^{\gamma_x}}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!} \quad \forall x \in [0,1]$$

Usando interpolación lineal a trozos (L), en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ tenemos

$$|f(x) - L(x)| = \left| \frac{f''(\theta_x)}{2} (x - x_i)(x - x_{i+1}) \right| \underset{|x - x_i|, |x - x_{i+1}| \leq 1/n}{\leq} \frac{e^{\gamma_x}}{2} \frac{1}{n^2} \leq \frac{e}{2n^2}.$$

b) Para p_n, necesitaremos que $\frac{e}{(n+1)!} \leq 10^{-2} \Rightarrow \underbrace{100 \cdot e}_{\simeq 272} \leq (n+1)!$
$\Rightarrow n \geq 5 \quad (6! = 720)$

En cambio, para L, necesitaremos que $\frac{e}{2n^2} \leq 10^{-2} \Rightarrow \underbrace{50 e}_{\simeq 136} \leq n^2 \Rightarrow n \geq 12$

c) Como tenemos $n+1 = 2^m + 1$ puntos equiespaciados, al aumentar m el conjunto de nodos va creciendo anidadamente: por ejemplo, para

- $m = 0$, tenemos los 2 nodos $0, 1$.
- $m = 1$, tenemos los 3 nodos $0, 1/2, 1$
- $m = 2$, tenemos los 5 nodos $0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$.

Así, conviene escribir el polinomio interpolante en forma de Newton, ya que podemos utilizar el polinomio calculado para un cierto m para calcular el polinomio correspondiente a un m mayor. Con las formas de Vandermonde y de Lagrange, para cada m se debe recalcular desde el inicio (ya sea rearmar el sistema o recalcular las funciones de base); además, con Vandermonde se tienen problemas de estabilidad numérica.

Ejercicio 4. Tenemos

X	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
Y	1	2	1	1

, $Y \simeq f(x) = a\cos(x) + b\,\mathrm{sen}(x) + c\cos(4x)$

a) Tenemos 3 parámetros y 4 datos, por lo que la matriz de diseño es $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$, dada por $a_{ij} = \phi_j(x_i)$, con $\phi_1(x) = \cos x$, $\phi_2(x) = \mathrm{sen}\, x$, $\phi_3(x) = \cos 4x$.

Queda:

$$A = \begin{bmatrix} \cos 0 & \mathrm{sen}\, 0 & \cos 0 \\ \cos \pi/2 & \mathrm{sen}\, \pi/2 & \cos 2\pi \\ \cos \pi & \mathrm{sen}\, \pi & \cos 4\pi \\ \cos 3\pi/2 & \mathrm{sen}\, 3\pi/2 & \cos 6\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Sea $b = [1\ 2\ 1\ 1]^t$, entonces las ecuaciones normales son $A^tAx = A^tb$, donde $x = (a, b, c]^t$ es el vector de parámetros. En este caso,

$$A^tA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A^tb = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Notar que A^tA es diagonal, por lo que $(A^tA)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$.

Podemos elegir cualquier norma matricial, por ejemplo la $\|\cdot\|_\infty$. Tenemos

$\|A^tA\|_\infty = 4$, $\|(A^tA)^{-1}\|_\infty = 1/2 \Rightarrow K(A, \|\cdot\|_\infty) = 2 \to$ No hay problemas de condicionamiento.

c) Como A tiene 3 columnas, se deben hacer 3 reflexiones de Householder.

La primera de ellas es la que tiene que mandar la primer columna $A^{(1)} \in \mathbb{R}^4$

a un vector colineal con e_1. Es de la forma $H = I - \rho u u^t$, donde

$$\rho = \frac{2}{\|u\|_2^2}, \quad u = A^{(1)} + \sigma e_1, \quad y \quad \sigma = \pm \|A^{(1)}\|_2 .$$

Como $A^{(1)} = [1 \ 0 \ -1 \ 0]^t$, tenemos $\sigma = \pm\sqrt{2}$. Por conveniencia, elegimos $\sigma > 0$ ya que $a_{11} > 0$. Con eso, queda $u = [1+\sqrt{2} \ \ 0 \ \ -1 \ \ 0]^t$.