Ejercicio 1.

a) Dado un sistema $A\mathbb{x}=\mathbb{b}$, con $A\in M_n(\mathbb{R})$, descomponemos A en su parte diagonal, triangular inferior y triangular superior: $A=D-E-F$, $A=\begin{pmatrix} \diagdown^{D} & -F \\ -E & \diagdown \end{pmatrix}$.

El método de Jacobi consiste en escribir

$$A\mathbb{x}=\mathbb{b} \iff (D-E-F)\mathbb{x}=\mathbb{b} \iff D\mathbb{x}=(E+F)\mathbb{x}+\mathbb{b},$$

lo que lleva a tomar $\mathbb{x}^{k+1}=\underbrace{D^{-1}(E+F)}_{=:Q_J}\mathbb{x}^k+\underbrace{D^{-1}\mathbb{b}}_{=:\mathbb{r}_J}$;

Observar que el desarrollo arriba asume que A no tiene ceros en la diagonal. Esto implica que D es invertible.

b) Para el sistema $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$, tenemos $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbb{b}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow Q_J=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -b \\ -c & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -b/a \\ -c/d & 0 \end{pmatrix}$$

Una condición necesaria y suficiente para la convergencia de Jacobi (independientemente de cómo se tome $\mathbb{x}^0$) es que $\rho(Q_J)<1$.

Es fácil verificar que el polinomio característico de Q_J es

$$\chi_{Q_J}(\lambda)=\lambda^2-\frac{bc}{ad}.$$

Por lo tanto, los dos valores propios de Q_J tienen módulo igual a $\sqrt{\left|\frac{bc}{ad}\right|}$: si $\frac{bc}{ad} \geq 0$, entonces los valores propios son $\pm\sqrt{\frac{bc}{ad}}$

y si $\frac{bc}{ad} < 0$ son $\pm\sqrt{-\frac{bc}{ad}}\, i$.

Concluimos que la condición buscada es $\left|\frac{bc}{ad}\right| < 1 \Leftrightarrow |bc| < |ad|$.

c) El método de Gauss-Seidel propone

$$Ax = b \Leftrightarrow (D-E)X = FX + b \Leftrightarrow X = \underbrace{(D-E)^{-1}F}_{=: Q_{GS}} X + \underbrace{(D-E)^{-1}b}_{=: \mathbb{F}_{GS}}$$

Para aplicarlo al sistema (1), debemos calcular

$$(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad}\begin{pmatrix} d & 0 \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ -c/ad & 1/d \end{pmatrix},$$

lo que implica $Q_{GS} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ -c/ad & 1/d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b/a \\ 0 & bc/ad \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \chi_{Q_{GS}}(\lambda) = \lambda\left(\lambda - \frac{bc}{ad}\right) \Rightarrow \rho(Q_{GS}) = \left|\frac{bc}{ad}\right|.$$

Concluimos que una condición necesaria y suficiente para que GS sea convergente independientemente de X^0 es que

$$\left|\frac{bc}{ad}\right| < 1 \Leftrightarrow |bc| < |ad| \rightsquigarrow \text{(Misma condición que para Jacobi!)}$$

Ejercicio 2.

a) De las gráficas mostradas, se observa lo siguiente:

* la única que ajusta los valores de las derivadas de f es la 1 (basta observar el nodo en $x=2$)

* la única que no genera oscilaciones más allá de los datos (es decir, cuyos extremos locales solamente se alcanzan en los nodos) es la 3.

Por lo tanto: 1 corresponde a la interpolante de Hermite; 2 corresponde a la spline; 3 corresponde a la dada por pchip.

b) Una interpolante cúbica a trozos consiste en usar, en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, un polinomio cúbico. Esto se consigue, por ejemplo, si se conocen los valores $y_i := p(x_i)$ y $d_i := p'(x_i)$ para $i=0,\dots,n$. En nuestros problemas de interpolación los valores $y_0,\dots,y_n$, están dados, por lo que se debe elegir una estrategia para determinar $d_0,\dots,d_n$.

Observar que, por diseño, la interpolante resultante es globalmente de clase C^1 (es polinomial a trozos e imponemos su continuidad) y la de su derivada en los nodos). La interpolación spline consiste en forzar la interpolante a ser globalmente de clase C^2. Esto da lugar a $n-1$ restricciones adicionales (en los nodos interiores).

↳ aún se tienen 2 grados de libertad "sobrantes" para determinar las $n+1$ incógnitas $d_0, \dots, d_n$.

Se hace alguna elección adicional que dé dos condiciones adicionales para $d_0, \dots, d_n$ y se resuelve el sistema lineal resultante para determinar sus valores.

c) La estrategia not-a-knot obtiene las dos condiciones adicionales mencionadas arriba imponiendo que la interpolante sea C^3 en $[x_0, x_2]$, $[x_{n-2}, x_n]$. Esto es equivalente a pedir continuidad de la derivada tercera en x_1 y x_{n-1}.

Como la interpolante es cúbica a trozos, esto es equivalente a ignorar los nodos x_1, x_{n-1} y simplemente usar un único polinomio en cada uno de los intervalos $[x_0, x_2]$ y $[x_{n-2}, x_n]$.

Ejercicio 3. $f(x) = e^{x/4} - x$

a) f es continua, con $\begin{cases} f(1) = e^{1/4} - 1 > 0 \\ f(2) = e^{1/2} - 2 < 0 \end{cases}$,

y por lo tanto tiene (al menos) una raíz en $[1,2]$.

Además, $f'(x) = \frac{e^{x/4}}{4} - 1$. Observa que f' es creciente, y por lo tanto $f'(x) \leq f'(2) = \frac{e^{1/2}}{4} - 1 < 0 \quad \forall x \in [1,2]$.

Como $f' < 0$ en $[1,2]$, f es monótona y la raíz es única.

b) Tenemos $x^{k+1} = e^{x^k/4} =: g(x^k)$, con $g(x) = e^{x/4}$.

La consistencia se deduce de que

$$g(x) = x \Leftrightarrow e^{x/4} = x \Leftrightarrow e^{x/4} - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Para que la iteración sea localmente convergente, es necesario y suficiente que $|g'(x^*)| < 1$.

Como $g'(x) = \frac{e^{x/4}}{4}$, tenemos

$$0 < g'(x^*) = \frac{e^{x^*/4}}{4} \underset{x^* = e^{x^*/4}}{=} \frac{x^*}{4} \overset{x^* \leq 2}{\leq} \frac{1}{2} \Rightarrow |g'(x^*)| \leq 1/2.$$

$\Downarrow$ la iteración converge.

Al ser $g'(x^*) \neq 0$, la convergencia es de primer orden, y con velocidad igual a $|g'(x^*)| = x^*/4$.

c) Se toma $x^{k+1} = \alpha e^{x^k/4} + (1-\alpha)x^k$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Esto corresponde a hacer $x^{k+1} = g_\alpha(x^k)$ con $g_\alpha(x) = \alpha e^{x/4} + (1-\alpha)x$.

Ahora tenemos $g'_\alpha(x^*) = \dfrac{\alpha e^{x^*/4}}{4} + 1 - \alpha = \dfrac{\alpha x^*}{4} + 1 - \alpha$

$$\Rightarrow |g'_\alpha(x^*)| < 1 \iff \begin{cases} \dfrac{\alpha x^*}{4} + 1 - \alpha < 1 \iff \alpha\left(\dfrac{x^*}{4} - 1\right) < 0 \iff \alpha > 0 \\[2ex] \dfrac{\alpha x^*}{4} + 1 - \alpha > -1 \iff \alpha\left(\dfrac{x^*}{4} - 1\right) > -2 \\ \qquad \iff \alpha < \dfrac{8}{4 - x^*} \end{cases}$$

La iteración es localmente convergente si y solo si $\alpha \in \left(0, \dfrac{8}{4-x^*}\right)$.

La convergencia es lo más rápida posible si elegimos α / $g'_\alpha(x^*) = 0$, esto es, $\dfrac{\alpha x^*}{4} + 1 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{4}{4 - x^*}$.

Ejercicio 4.

a) Dado un problema de valores iniciales $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

los métodos predictores - correctores consisten en usar dos métodos en conjunto: primero, uno explícito (como predicción), y luego se utiliza el valor predicho en el lado derecho de un método implícito. Esto da lugar a un método explícito, y se logra evitar usar métodos iterativos para dar el paso con el método implícito.

b) Dado el problema $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ tenemos

* Euler h/ adelante: $Y_{k+1} = Y_k + h_k f(t_k, Y_k)$
* Euler h/ atrás: $Y_{k+1} = Y_k + h_k f(t_{k+1}, Y_{k+1})$

Por lo tanto, el método predictor - corrector buscado consiste en hacer: $Y_{k+1}^{(P)} = Y_k + h_k f(t_k, Y_k)$

$$Y_{k+1} = Y_k + h_k f(t_{k+1}, Y_{k+1}^{(P)})$$

En forma más compacta, $Y_{k+1} = Y_k + h_k f(t_{k+1}, Y_k + h_k f(t_k, Y_k))$.

c) Dado (t_k, Y_k), debemos analizar el error de truncamiento local $l_{k+1} := Y_{k+1} - u(t_{k+1})$, donde u es la solución al problema $\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)). \\ u(t_k) = y_k \end{cases}$

Haciendo un desarrollo de Taylor, $u(t_{k+1}) = y_k + \overbrace{h_k}^{= t_{k+1} - t_k} \underbrace{u'(t_k)}_{= f(t_k, y_k)} + O(h_k^2)$.

Por lo tanto,

$$\ell_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_k + h_k f(t_k, y_k)) - y_k - h_k f(t_k, y_k) + O(h_k^2)$$

$$= h_k \left[f(t_{k+1}, y_k + h_k f(t_k, y_k)) - f(t_k, y_k) \right] + O(h_k^2).$$

Hacemos un desarrollo de Taylor para f alrededor de (t_k, y_k), y abreviamos $f := f(t_k, y_k)$, $f_t := \frac{\partial f}{\partial t}(t_k, y_k)$, $f_y := \frac{\partial f}{\partial y}(t_k, y_k)$:

$$f(t_{k+1}, y_k + h_k f(t_k, y_k)) = f + f_t h_k + f_y h_k f + O(h_k^2).$$

Concluimos que $\ell_{k+1} = h_k^2 (f_t + f_y f) + O(h_k^2) = O(h_k^2)$.

Como $\ell_{k+1} = O(h_k^2)$, deducimos que el método es consistente y que es de primer orden.