Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL
Métodos Numéricos

Examen 27 de febrero de 2024.

N° de examen	Apellido y Nombre	Cédula

El examen dura 3 horas. No se puede utilizar material.

Ejercicio 1. [30 puntos] Consideremos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas $\mathbf{x} = [x, y]^t$,

$$\begin{cases} ax + by = p, \\ cx + dy = q, \end{cases} \tag{1}$$

donde $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$, y se tiene $a, d \neq 0$.

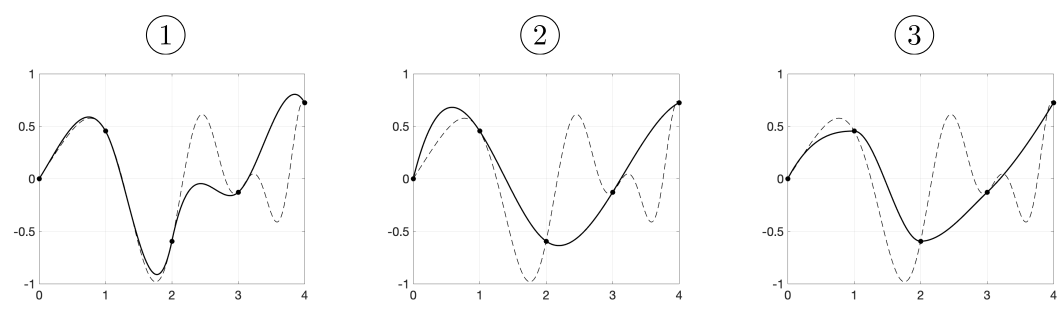
a) Deducir el método de Jacobi para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Si escribimos la iteración de Jacobi en la forma $\mathbf{x}^{k+1} = Q_J\mathbf{x}^k + \mathbf{r}_J$, ¿cómo son la matriz Q_J y el vector $\mathbf{r}_J$ para el sistema (1)?

b) Dar una condición necesaria y suficiente para que el método de Jacobi aplicado al sistema (1) sea convergente independientemente de cómo se tome $\mathbf{x}^0$. La condición solamente puede depender de los parámetros a, b, c, d, p, q.

c) Repetir los dos puntos anteriores para el método de Gauss-Seidel.

[Puede ser útil tener en cuenta que si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, entonces $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.]

Ejercicio 2. [20 puntos] Dada la función $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x^2)$, se toman los nodos $x_i = i$ $(i = 0, \ldots, 4)$, y se realizan interpolaciones cúbicas a trozos por $(x_i, f(x_i))$ usando una spline, la interpolante de Hermite, y la interpolante “que preserva forma” dada por la función de Octave `pchip`. Se obtienen las siguientes gráficas, en las que las interpolantes están representadas con una línea sólida y el gráfico de f con una línea punteada.



a) Explicar a qué interpolante corresponde cada gráfico, y justificar la elección.

b) Explicar en qué consiste una interpolante spline cúbica a trozos y, sin que sea necesario dar fórmulas, indicar cómo se determinan los coeficientes polinomiales en esa interpolación.

c) La interpolante spline utilizada en uno de los dibujos de arriba es del tipo *not-a-knot*. Explicar en qué consiste esa estrategia.

Ejercicio 3. [25 puntos] Consideremos la función $f(x) = e^{x/4} - x$.

a) Probar que f tiene una única raíz en el intervalo $[1, 2]$, a la que llamaremos x^*. [Puede ser útil tener en cuenta que $\log 2 \approx 0{,}69$.]

b) Se propone aproximar x^* mediante la iteración de punto fijo

$$x^{k+1} = e^{x^k/4}.$$

Demostrar que la iteración es consistente y que es convergente si x^0 está lo suficientemente cerca de x^*. Determinar el orden y velocidad de convergencia.

c) En lugar de la iteración de la parte anterior, se propone tomar un $\alpha \neq 0$ fijo y definir una iteración a partir de

$$x^{k+1} = \alpha e^{x^k/4} + (1 - \alpha) x^k. \tag{2}$$

¿Para qué valores de α la iteración es localmente convergente hacia x^*? ¿Cuál es el valor de α óptimo para que la convergencia hacia x^* sea lo más rápida posible?

Ejercicio 4. [25 puntos]

a) Describir en qué consisten los métodos predictores-correctores para resolver problemas de valores iniciales.

b) Escribir cómo es el método predictor-corrector asociado a los métodos de Euler hacia adelante y hacia atrás.

c) Probar que dicho método es consistente y determinar de qué orden es.