Ejercicio 1. $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$, $x \neq 0$.

a) Para calcular $\lim_{x \to 0} f(x)$, hacemos un desarrollo de Taylor a la función $1-\cos(x)$ alrededor de 0:

$$1-\cos(x) = \underbrace{(1-\cos(0))}_{=0} + \underbrace{(1-\cos(x))'\Big|_{x=0}}_{=\operatorname{sen}(0)=0} \cdot x + \underbrace{(1-\cos(x))''\Big|_{x=0}}_{=\cos(0)=1} \cdot \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

$$\Rightarrow 1-\cos(x) = \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

Por lo tanto, para $x \sim 0$, tenemos:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)}{x^2} = \frac{1}{2} + O(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}.$$

Vamos a tomar $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, y podemos asumir que $f'(0) = 0$.

b) El número de condición de una f en un punto x en su dominio es

$$K_f(x) = \frac{x f'(x)}{f(x)} \Rightarrow K_f(0) = 0.$$

Por lo tanto, el error inevitable al evaluar $f(x)$ con $x \sim 0$ es

$$\varepsilon := K_f(0) \cdot \frac{\varepsilon_M}{2} + \frac{\varepsilon_M}{2} = \frac{\varepsilon_M}{2}.$$

En palabras: debería ser posible computar $f(x)$ para $x \sim 0$ en forma numéricamente estable.

c) Estamos observando una cancelación catastrófica: observar (parte a)) que para $x \sim 0$ es $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$.

Luego, si $x \sim 10^{-8}$ tenemos $\cos x \sim 1 - 5 \times 10^{-17}$. En aritmética de punto flotante con precisión doble, $1 - 5 \times 10^{-17}$ es redondeado a 1, y por lo tanto se computa $1 - \cos(10^{-8}) = 0$.

Algo similar ocurre para $x = 10^{-9}$, ya que $\cos(10^{-9}) \simeq 1 - 5 \times 10^{-19}$ y este número se redondea a 1.

d) Hay que evitar la cancelación en el numerador. Una opción es multiplicar y dividir por $1 + \cos(x)$: $f(x) = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2 (1+\cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

Como $1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$, podemos escribir: $f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)}$.

Esta fórmula es numéricamente estable para $x \sim 0$, ya que no introduce cancelaciones.

Otra opción es usar la identidad trigonométrica $1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2(x/2)$ (ver Ejemplo 1.5.1 en las notas). Con esa identidad, tenemos

$f(x) = \frac{2 \operatorname{sen}^2(x/2)}{x^2}$. Esta forma de escribir f también es numéricamente estable.

Ejercicio 2. $f(x) = e^{-x} - \operatorname{sen} x$

a) Como $f'(x) = -e^{-x} - \cos x$, el método de Newton-Raphson aplicado a esta función queda

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R} \\ x^{k+1} = x^k + \dfrac{e^{-x^k} - \operatorname{sen} x^k}{e^{-x^k} + \cos x^k} \end{cases}.$$

b) Para la demostración del teorema general sobre el orden de convergencia de Newton-Raphson, ver teórico.

Damos una demostración para el método aplicado a esta función. Hacemos un desarrollo de Taylor a f evaluado en x^* (la raíz que buscamos):

$$0 = f(x^*) = f(x^k) + f'(x^k)(x^* - x^k) + \frac{f''(\theta_k)}{2}(x^* - x^k)^2$$

$$\Rightarrow 0 = e^{-x^k} - \operatorname{sen} x^k - (e^{-x^k} + \cos x^k)(x^* - x^k) + \frac{f''(\theta_k)}{2}(x^* - x^k)^2,$$

con θ_k entre x^k y x^*. Observar que f es de clase C^2 en $\mathbb{R}$.

Observemos que si $x^k \simeq x^* \simeq 0{,}59 \Rightarrow \cos x^k > 0$, por lo tanto $e^{-x^k} + \cos x^k > 0$.

Dividimos el desarrollo de Taylor por $e^{-x^k} + \cos x^k$, y escribimos $E^k := x^k - x^*$, (usamos E mayúscula para distinguir el error de la exponencial)

$$0 = \underbrace{\frac{e^{-x^k} - \operatorname{sen} x^k}{e^{-x^k} + \cos x^k} + x^k}_{= x^{k+1}} - x^* + \frac{f''(\theta_k)}{2(e^{-x^k} + \cos x^k)}(E^k)^2$$

$$\Rightarrow 0 = E^{k+1} + \frac{f''(\theta_k)}{2(e^{-x^k} + \cos x^k)}(E^k)^2.$$

$$\Rightarrow \frac{E^{k+1}}{(E^k)^2} = -\frac{f''(\theta_k)}{2(e^{-x^k} + \cos x^k)} = -\left(\frac{e^{-\theta_k} + \operatorname{sen}\theta_k}{2(e^{-x^k} + \cos x^k)}\right)$$

Tomando $k \to \infty$, tenemos $\lim_k \dfrac{E^{k+1}}{(E^k)^2} = \lim_{k\to\infty} -\left(\dfrac{e^{-\theta_k} + \operatorname{sen}\theta_k}{2(e^{-x^k} + \cos x^k)}\right) = -\left(\dfrac{e^{-x^*} + \operatorname{sen} x^*}{2(e^{-x^*} + \cos x^*)}\right),$

porque $\theta_k \to x^*$ (θ_k está encerrado entre x^k y x^*).

Como $\operatorname{sen} x^* = e^{-x^*} > 0$, el término de la derecha es $\neq 0$ y concluimos que el método de Newton-Raphson es de segundo orden.

c) Alcanza con tomar cualquier función g que cumpla:

- g contractiva en un entorno de x^*;
- $g(x) = x \iff x = x^*$ en un entorno de x^*.

Por ejemplo, $e^{-x} - \operatorname{sen} x = 0 \iff x = x + e^{-x} - \operatorname{sen} x$

↳ Tomar $g(x) = x + e^{-x} - \operatorname{sen} x$

Observar que g es infinitamente derivable, y que $g'(x) = 1 - e^{-x} - \cos x$

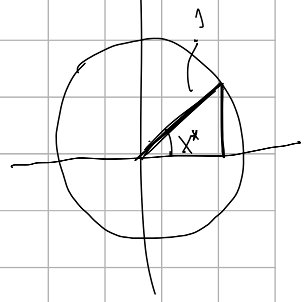
Por lo tanto, $g'(x^*) = 1 - e^{-x^*} - \cos x^* \underset{\substack{\uparrow \\ e^{-x^*} = \operatorname{sen} x^*}}{=} 1 - \operatorname{sen} x^* - \cos x^*$.

Como $x^* \in (0, \pi/2)$, $\operatorname{sen} x^* > 0$, $\cos x^* > 0$ y por lo tanto $g'(x^*) < 1$.

Además, $\operatorname{sen} x^* < 1$, $\cos x^* < 1$ y por lo tanto $g'(x^*) > -1$.

$\Rightarrow |g'(x^*)| < 1$, y esta g sirve!

De hecho, como $x^* \in (0, \pi/2)$, se tiene $\operatorname{sen} x^* + \cos x^* > 1$



y por lo tanto $g'(x^*) < 0$.

Como $g'(x^*) \neq 0$, deducimos que esta iteración converge con primer orden.

Ejercicio 3.

a) Ver Teórico (sección 5.1 para la versión lineal y sección 5.7 para la no lineal. Ambas son respuestas aceptables, pero en esta resolución describimos el problema en la forma más general.)

Si tenemos $\{(t_i, y_i)\}_{i=1,\dots,m}$ y esperamos que sea $y_i \simeq f(t_i; x)$ con un conjunto de parámetros $x \in \mathbb{R}^n$, entonces hacer un ajuste por mínimos cuadrados consiste en lo siguiente.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, el RESIDUO es $r := r(x) \in \mathbb{R}^m \,/\, r_i := f(t_i; x) - y_i$, $i = 1, \dots, m$.

Ajustar por mínimos cuadrados es hallar el/los vectores $x \in \mathbb{R}^n$ que hacen que la norma euclídea del residuo sea lo menor posible, es decir, hallar $x^* \in \mathbb{R}^n$ /

$$\|r(x^*)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} (f(t_i; x^*) - y_i)^2 \leq \|r(x)\|_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

b) Tenemos $f(t) = \alpha + \alpha \log(\beta + t) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

La dependencia en los parámetros es no lineal. El método de Gauss-Newton consiste en aproximar la solución al problema no lineal mediante una sucesión de problemas lineales.

Concretamente, poniendo el residuo como una función $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y haciendo una aproximación de primer orden tenemos, dado $x^k \in \mathbb{R}^n$,

$$r(x) \simeq r(x^k) + J_r(x^k)(x - x^k).$$

Hacemos como en el método de Newton-Raphson y definimos x^{k+1} como el vector que hace que el lado derecho sea nulo: x^{k+1} es la solución al problema lineal

$$J_r(x^k)(x^{k+1} - x^k) = -r(x^k).$$

Así, el vector $r(x^k) \in \mathbb{R}^m$ se define como arriba, y $J_r(x^k)$ es la matriz Jacobiana de r respecto a los parámetros.

Para la función que nos da el problema, con los datos

t	y
0	1
1	2
2	3

,

tenemos $r(x^k) \in \mathbb{R}^3$ /

$$r_1 = f\left(t_1; \begin{pmatrix}\alpha^k\\ \beta^k\end{pmatrix}\right) - y_1 = \alpha^k + \alpha^k \log(\beta^k + t_1) - y_1 = \alpha^k + \alpha^k \log \beta^k - 1$$

$$r_2 = f\left(t_2; \begin{pmatrix}\alpha^k\\ \beta^k\end{pmatrix}\right) - y_2 = \alpha^k + \alpha^k \log(\beta^k + t_2) - y_2 = \alpha^k + \alpha^k \log(\beta^k + 1) - 2$$

$$r_3 = f\left(t_3; \begin{pmatrix}\alpha^k\\ \beta^k\end{pmatrix}\right) - y_3 = \alpha^k + \alpha^k \log(\beta^k + t_3) - y_3 = \alpha^k + \alpha^k \log(\beta^k + 2) - 3.$$

La jacobiana es $J^k := J_r(x^k) \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ /

$$(J^k)_{i1} = \frac{\partial r}{\partial \alpha}\left(t_i; \begin{pmatrix}\alpha^k\\ \beta^k\end{pmatrix}\right) = 1 + \log(\beta^k + t_i) \quad , \quad i = 1, \dots, 3$$

$$(J^k)_{i2} = \frac{\partial r}{\partial \beta}\left(t_i; \begin{pmatrix}\alpha^k\\ \beta^k\end{pmatrix}\right) = \frac{\alpha^k}{\beta^k + t_i} \quad , \quad i = 1, \dots, 3$$

En forma de pseudo-código, podemos escribir:

Datos: $\{(t_i, y_i)\}_{i=1,\dots,m}$; $tol > 0$; $max\_it > 0$; $x^0 \in \mathbb{R}^2$

Resultado: $x = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ que resuelve el prob. de mín. cuad. no lineal

```
x ← x⁰ ; k ← 0 ; d = 0⃗
while ||d|| > tol & k < max_it
    b = y - f(x) = -r      % como arriba
    A = J_r(x)   % como arriba. Notar que J_r(x) = J_f(x)
    d ← sol. del prob. de mín. cuad. lineal Ad = b
    x ← x + d
    k ← k + 1
end
```

c) Tenemos $X^0 := \begin{pmatrix}\alpha^0\\ \beta^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow f(t_i; X^0) = 1 + \log(1+t_i)$.

El vector r en el paso inicial es: $r^0 = \begin{pmatrix} 1+\log(1) - 1 \\ 1+\log(2) - 2 \\ 1+\log(3) - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \log 2 - 1 \\ \log 3 - 2 \end{pmatrix}$

La jacobiana en el paso inicial es $J^0 = \begin{pmatrix} 1+\log(1) & \frac{1}{1+0} \\ 1+\log(2) & \frac{1}{1+1} \\ 1+\log(3) & \frac{1}{1+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\log 2 & 1/2 \\ 1+\log 3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Hay que resolver el problema de mínimos cuadrados lineal

$$J^0 d = r^0 \qquad (\text{con } d \in \mathbb{R}^2)$$

y luego se actualiza $\begin{pmatrix}\alpha^1\\ \beta^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha^0\\ \beta^0\end{pmatrix} + d$.

Ejercicio 4.

$$K_1 = f(t_k, y_k)$$
$$K_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{4}(K_1 + K_2)\right)$$
$$y_{k+1} = y_k + h K_2.$$

a) En la fórmula que define K_2, aparece K_2 del lado derecho. Por lo tanto, para determinar K_2, en general deberemos resolver una ecuación. Esto implica que el método es implícito.

b) Aplicamos el método al problema test $\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\lambda < 0$:

$$K_1 = \lambda y_k$$
$$K_2 = \lambda\left(y_k + \frac{h}{4}(K_1 + K_2)\right) = \lambda y_k\left(1 + \frac{\lambda h}{4}\right) + \frac{\lambda h K_2}{4}$$
$$\Rightarrow K_2 = \frac{\lambda y_k\left(1 + \frac{\lambda h}{4}\right)}{(1 - \lambda h/4)}$$

$$y_{k+1} = y_k + h K_2 = y_k\left(1 + \frac{\lambda h(1 + \lambda h/4)}{(1 - \lambda h/4)}\right) = \left(\frac{1 + 3\lambda h/4 + (\lambda h)^2/4}{1 - \lambda h/4}\right) y_k$$

$$\Rightarrow y_k = \left(\frac{1 + 3\lambda h/4 + (\lambda h)^2/4}{1 - \lambda h/4}\right)^k y_0$$

Para que sea estable, necesitamos $\left|\frac{1 + 3\lambda h/4 + (\lambda h)^2/4}{1 - \lambda h/4}\right| < 1$, es decir,

$$\left|1 + 3\lambda h/4 + (\lambda h)^2/4\right| < \left|1 - \lambda h/4\right|.$$

Sea $z = \lambda h$, queremos:

$$-1 + z/4 < 1 + 3z/4 + z^2/4 < 1 - z/4$$

La primer desigualdad se cumple si y sólo si $0 < 2 + z/2 + z^2/4$,

que se cumple $\forall z \in \mathbb{R}$.

La segunda desigualdad se cumple si y sólo si $z + z^2/4 < 0$

es decir, si y sólo si $z \cdot \left(1 + \frac{z}{4}\right) < 0$. Como $z < 0$, necesitamos

$1 + \frac{z}{4} > 0 \rightsquigarrow z > -4 \rightsquigarrow \lambda h > -4$

Concluimos que el método es estable si y sólo si $h < 4/|\lambda|$.

c) Tenemos el PVI $\begin{cases} y'(t) = 1/y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Tomamos $t_0 = 0$, $y_0 = y(0) = 1$, y hacemos un paso con $h = 1$:

$$K_1 = f(t_0, y_0) = 1/y_0 = 1.$$

$$K_2 = f\left(t_0 + h/2,\, y_0 + \frac{h}{4}(K_1 + K_2)\right)$$

$$= \frac{1}{y_0 + \frac{h}{4}(K_1 + K_2)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(1 + K_2)}.$$

$\hookrightarrow y_0 = 1,\ h = 1,\ K_1 = 1$

Por lo tanto, $K_2 = \dfrac{1}{\frac{5}{4} + \frac{K_2}{4}} = \dfrac{4}{5 + K_2}$.

$$\Rightarrow K_2^2 + 5K_2 - 4 = 0 \rightarrow K_2 = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}.$$

Como $K_2 = f(\cdot,\cdot) > 0$, nos quedamos con $K_2 = \dfrac{-5 + \sqrt{41}}{2}$.

$$\Rightarrow y_1 = y_0 + hK_2 = 1 + \left(\frac{-5 + \sqrt{41}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y_1 = \frac{-3 + \sqrt{41}}{2}}.$$