Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL
Métodos Numéricos

Examen 5 de febrero de 2024.

N° de examen	Apellido y Nombre	Cédula

El examen dura 3 horas. No se puede utilizar material.

Ejercicio 1. [20 puntos] Consideremos la función $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}.$$

a) Verificar que $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$. En adelante, consideramos $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ como arriba, con $f(0)=\frac{1}{2}$ y podemos asumir que $f'(0)=0$.

b) Calcular el número de condición de f en $x=0$ y estimar el error inevitable al evaluar $f(x)$ para $x\approx 0$ usando aritmética de punto flotante con precisión doble ($\varepsilon_M = 2^{-52}\approx 2{,}2\times 10^{-16}$) y redondeo.

c) Se corre el siguiente código de Octave:

```
f = @(x) (1-cos(x))/(x^2);
valores = [f(1e-5) f(1e-6) f(1e-7) f(1e-8) f(1e-9)]
```

y se obtiene la salida

```
valores =

    0.5000    0.5000    0.4996         0         0
```

¿Por qué obtenemos resultados tan malos al evaluar $f(10^{-8})$ y $f(10^{-9})$?

d) ¿Cómo se puede reescribir $f(x)$ para que la se pueda evaluar de forma numéricamente estable con $x\approx 0$?

Ejercicio 2. [30 puntos] La función $f(x) = e^{-x} - \operatorname{sen}(x)$ tiene una raíz en $x^*\approx 0{,}59$.

a) Escribir la forma que toma el método de Newton-Raphson aplicado a esta función.

b) Asumiendo que el método de Newton-Raphson es localmente convergente, demostrar que es de segundo orden. Se acepta demostrarlo para esta función en particular o demostrar un teorema general y aplicarlo a esta función.

c) Proponer otro método iterativo convergente (de la forma $x = g(x)$) para determinar x^* y analizar su orden de convergencia. No es necesario demostrar los resultados teóricos que se utilicen en esta parte.

Ejercicio 3. [30 puntos]

a) Se tiene una tabla de datos $\{(t_i, y_i)\}_{i=1,\dots,m}$. Se espera que se cumpla $y_i \approx f(t_i; x)$, donde $x \in \mathbb{R}^n$ es un vector de parámetros. Explicar en qué consiste ajustar esos datos mediante el método de mínimos cuadrados.

b) Se sabe que un sistema se comporta de la forma

$$f(t) = \alpha + \alpha \log(\beta + t).$$

Se realiza una experimentación con el sistema y se obtiene la tabla

t	y
0	1
1	2
2	3

.

Describir el método de Gauss-Newton para ajustar los parámetros α, β mediante mínimos cuadrados y escribir un pseudocódigo que lo implemente.

c) Se inicializa el método de la parte anterior con $\begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \beta^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Escribir explícitamente el problema de mínimos cuadrados lineal que se debe resolver para computar $\begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \beta^1 \end{bmatrix}$. No se pide resolver el sistema.

Ejercicio 4. [20 puntos] Sea $f\colon [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tan regular como sea necesario. Para resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

consideramos el siguiente método de Runge-Kutta con paso constante h:

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_k, y_k), \\ K_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{4}(K_1 + K_2)\right), \\ y_{k+1} &= y_k + hK_2. \end{aligned}$$

a) Indicar si se trata de un método explícito o implícito. Justificar.

b) Analizar la estabilidad absoluta de este método.

c) Se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) &= \frac{1}{y} \\ y(0) &= 1 \end{cases},$$

cuya solución se sabe que satisface $y'(t) > 0$ para todo $t > 0$. Determinar el valor de y_1 usando el método de Runge-Kutta mencionado arriba con paso $h = 1$.