Ejercicio 1: $f(x) = \log(1+x)$, $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$.

$n = 2$:

$x_0 = 0 \rightsquigarrow f(x_0) = 0$

$x_1 = 1/2 \to f(x_1) = \log 3/2$

$x_2 = 1 \to f(x_2) = \log 2$

a) Tenemos 3 puntos distintos $\Rightarrow$ existe un único polinomio p_2 de grado ≤ 2 tal que $p_2(x_i) = f_2(x_i)$, $i = 0, 1, 2$. Lo escribimos usando la base de Lagrange:

$$\begin{cases} L_2^0(x) = 2(x - 1/2)(x-1) \\ L_2^1(x) = 4x(1-x) \\ L_2^2(x) = 2x(x - 1/2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_2(x) = f(x_0)L_2^0(x) + f(x_1)L_2^1(x) + f(x_2)L_2^2(x).$$

$$= 0 + 4\log(3/2)x(1-x) + 2\log(2)x(x - 1/2).$$

b) Consiste en usar interpolación lineal en los subintervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$.

En $[x_0, x_1]$: $L(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)$

$$\Rightarrow L(x) = x\left(\frac{\log 3/2}{1/2}\right) = 2\log(3/2)x$$

En $[x_1, x_2]$: $L(x) = f(x_1) + (x - x_1)\left(\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right)$

$$\Rightarrow L(x) = \log(3/2) + (x - 1/2)\left(\frac{\log 2 - \log 3/2}{1 - 1/2}\right)$$

La interpolante lineal a trozos buscada es:

$$L(x) = \begin{cases} 2\log(3/2)\,x & \text{en } [0, 1/2] \\ \log(3/2) + (2x-1)\log(4/3) & \text{en } [1/2, 1]. \end{cases}$$

c) La interpolación cúbica a trozos de Hermite consiste en usar una interpolante cúbica a trozos por los puntos dados y cuya derivada coincida con la de f en los nodos.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow \begin{cases} d_0 := f'(x_0) = 1 \\ d_1 = f'(x_1) = \dfrac{1}{1+1/2} = \dfrac{2}{3} \\ d_2 = f'(x_2) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Usamos la fórmula que se da en la letra del examen, con $y_0 = 0$, $y_1 = \log 3/2$, $y_2 = \log 2$,

$d_0 = 1$, $d_1 = 2/3$, $d_2 = 1/2$;

$h_0 = h_1 = 1/2$.

En $[x_0, x_1]$: observar que $s = x - x_0 = x$,

$$H(x) = \left(\frac{3 \cdot 1/2\, x^2 - 2x^3}{(1/2)^3}\right)\log(3/2) + \left(\frac{x^2(x-1/2)}{(1/2)^2}\right)\cdot\frac{2}{3} + \frac{x(x-1/2)^2}{(1/2)^2}$$

$$= 8\log(3/2)\left(\frac{3}{2}x^2 - 2x^3\right) + \frac{8}{3}x^2(x-1/2) + 4x(x-1/2)^2.$$

En $[x_1, x_2]$: aquí $s = x - x_1 = x - 1/2$,

$$H(x) = \frac{3/2(x-1/2)^2 - 2(x-1/2)^3}{(1/2)^3}\log 2 + \frac{(1/2)^3 - 3/2(x-1/2)^2 + 2(x-1/2)^3}{(1/2)^3}\log 3/2$$

$$+ \frac{(x-1/2)^2(x-1)}{(1/2)^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{(x-1/2)(x-1)^2}{(1/2)^2}\,\frac{2}{3}.$$

La interpolante de Hermite buscada es:

$$H(x) = \begin{cases} 8\log(3/2)\left(\frac{3}{2}x^2 - 2x^3\right) + \frac{8}{3}x^2(x-1/2) + 4x(x-1/2)^2, & x \in [0, 1/2), \\ 8\log 2\left(\frac{3}{2}(x-1/2)^2 - 2(x-1/2)^3\right) + 8\log 3/2\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{2}(x-1/2)^2 + 2(x-1/2)^3\right) & \\ \quad + 2(x-1/2)^2(x-1) + \frac{8}{3}(x-1/2)(x-1)^2, & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Ejercicio 2.

a) $\hat{A} = U \Sigma V^t$. Para resolver un problema de mínimos cuadrados $Ax = y$ de forma eficiente usando SVD, nos basta con resolver el problema $\Sigma w = U^t y$ (en el sentido de mínimos cuadrados) y luego computar $x = Vw$.

Tenemos
$$U^t y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el problema de mínimos cuadrados
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} w_1 = 1 \\ w_2 = 0 \end{matrix}$$

Finalmente,
$$x = Vw = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Si llamamos $z := U^t y$, entonces $\| y - Ax \| = \| z_{3:4} \| = 1$.

b) Como $\tilde{S} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, tiene que ser $rg(\tilde{A}) = 1$.

En este caso, como $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$ y $rg(\tilde{A}) < 2$, perdemos unicidad de soluciones.

La función $\Phi(x) := \| y - \tilde{A}x \|^2$ tiene puntos críticos en los x / $\tilde{A}^t \tilde{A} x = \tilde{A}^t y$, y esos puntos críticos son mínimos.

Que los puntos críticos son mínimos se puede argumentar de dos maneras:

(i) Porque $\Phi(x) = x^t \tilde{A}^t \tilde{A} x - 2x^t \tilde{A}^t y + y^t y$ es una función cuadrática y la matriz $\tilde{A}^t \tilde{A}$ es semidefinida positiva.

(ii) Porque $\Phi(x)$ es la distancia (al cuadrado) entre $\tilde{A}x$ e y, y por lo tanto buscar mínimos de Φ es buscar la distancia entre y y el espacio de columnas de $\tilde{A}$.

c) Ya tenemos calculado el vector $z = U^t y = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Ahora, debemos buscar soluciones al problema de mínimos cuadrados

$\tilde{S}\tilde{w} = z$, es decir $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{w}_1 = 1$

$\tilde{w}_2$ está libre.

Las soluciones son de la forma $\tilde{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

La que tiene norma mínima es la que corresponde a $\alpha = 0$.

Calculamos $x = V\tilde{w} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 - \alpha/2 \\ 1/2 + \sqrt{3}\alpha/2 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Las soluciones del problema de mínimos cuadrados $\tilde{A}x = y$ son de la forma: $x = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 - \alpha/2 \\ 1/2 + \sqrt{3}\alpha/2 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$; y la solución de norma mínima es $x = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, consideramos $x^{k+1} = x^k + \alpha(b - Ax^k)$.

a) Escribimos la iteración como $x^{k+1} = (I - \alpha A)x^k + \alpha b$.

Sea $Q := I - \alpha A$, entonces la iteración es convergente si y sólo si $\rho(Q) < 1$.

Los valores propios de Q son $\lambda_i = 1 - \alpha\mu_i$, donde μ_i son los valores propios de A.

Calculamos los μ_i: $\begin{vmatrix} 3-\mu & 2 \\ 2 & 3-\mu \end{vmatrix} = 0 \iff \mu^2 - 6\mu + 5 = 0$
$\Updownarrow$
$\mu = 1, \quad \mu = 5.$

$\Rightarrow$ Los valores propios de Q son $1-\alpha$, $1-5\alpha$; y para que la iteración sea convergente, necesitamos que

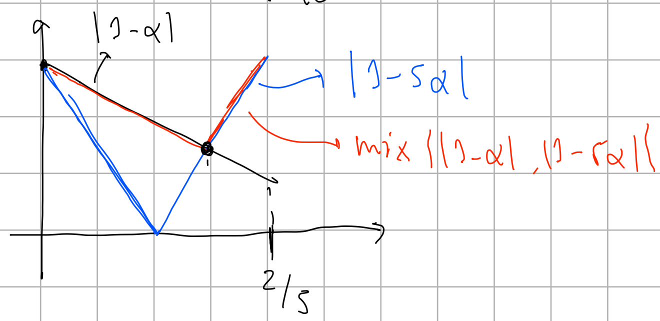
$$\max\{|1-\alpha|, |1-5\alpha|\} < 1.$$

Tenemos $\left.\begin{cases} |1-\alpha| < 1 \iff 0 < \alpha < 2 \\ |1-5\alpha| < 1 \iff 0 < \alpha < 2/5 \end{cases}\right\} \Rightarrow$ la iteración es convergente sii $\alpha \in (0, 2/5)$.

b) Para que la iteración converja en la menor cantidad de pasos posible, debemos buscar que $\rho(Q)$ sea lo menor posible

$\Rightarrow$ debemos buscar α / la función $\max\{|1-\alpha|, |1-5\alpha|\}$ alcance su mínimo absoluto.

Hacemos un argumento gráfico



El mínimo se alcanza donde
$1-\alpha = -(1-5\alpha)$
$\hookrightarrow \boxed{\alpha = 1/3}$

Ejercicio 4. $y_{k+1} = y_k + h\left[\theta f(t_k, y_k) + (1-\theta) f(t_{k+1}, y_{k+1})\right].$

a) Es implícito si $\theta \neq 1$. El término con y_{k+1} del lado derecho solamente se anula para $\theta = 1$.

b) Miramos el problema $\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$, $\lambda < 0$.

Nos queda: $y_{k+1} = y_k + h\left[\theta \lambda y_k + (1-\theta)\lambda y_{k+1}\right]$.

$\Rightarrow y_{k+1} = \left(\dfrac{1+\theta h\lambda}{1-(1-\theta)h\lambda}\right) y_k \Rightarrow y_k = \left(\dfrac{1+\theta h\lambda}{1-(1-\theta)h\lambda}\right)^k y_0$

Para que sea absolutamente estable, tiene que ser $\left|\dfrac{1+\theta h\lambda}{1-(1-\theta)h\lambda}\right| < 1$,

es decir: $-1+(1-\theta)h\lambda < 1+\theta h\lambda < 1-(1-\theta)h\lambda$

$\quad$ ↳ se cumple $\forall h>0, \lambda<0$.

Para que se cumpla, tiene que ser $(1-2\theta)h\lambda < 2$.

Si $(1-2\theta) \geq 0$, entonces la desigualdad se cumple $\forall h>0, \lambda<0$.

Si $(1-2\theta) < 0$, entonces nos queda una restricción: $h < \dfrac{2}{\lambda(1-2\theta)}$.

$\Rightarrow$ El método es incondicionalmente estable si $\theta \leq 1/2$.

c) Queremos estudiar el error local de truncamiento.

Sea u la solución al PVI $\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_k) = y_k \end{cases}$.

Hacemos un desarrollo de Taylor a u alrededor de t_k,

$$\boxed{\begin{aligned} u(t_{k+1}) &= u(t_k) + h u'(t_k) + \frac{h^2}{2} u''(t_k) + O(h^3) \\ &= y_k + h f(t_k, y_k) + \frac{h^2}{2} u''(t_k) + O(h^3), \end{aligned}} \quad (1)$$

y otro alrededor de t_{k+1}:

$$u(t_k) = u(t_{k+1}) - h u'(t_{k+1}) + \frac{h^2}{2} u''(t_{k+1}) + O(h^3)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t_{k+1}) = y_k + h f(t_{k+1}, u(t_{k+1})) - \frac{h^2}{2} u''(t_{k+1}) + O(h^3)} \quad (2)$$

Hacemos $\theta \cdot (1) + (1-\theta) \cdot (2)$:

$$\begin{aligned} u(t_{k+1}) = y_k &+ h\left[\theta f(t_k, y_k) + (1-\theta) f(t_{k+1}, u(t_{k+1}))\right] \\ &+ \frac{h^2}{2}\left[\theta u''(t_k) - (1-\theta) u''(t_{k+1})\right] + O(h^3). \end{aligned}$$

Sumamos y restamos $h(1-\theta) f(t_{k+1}, y_{k+1})$ del lado derecho, para que quede y_{k+1}:

$$\boxed{\begin{aligned} u(t_{k+1}) = y_{k+1} &+ h(1-\theta)\left[f(t_{k+1}, u(t_{k+1})) - f(t_{k+1}, y_{k+1})\right] \\ &+ \frac{h^2}{2}\left[\theta u''(t_k) - (1-\theta) u''(t_{k+1})\right] + O(h^3). \end{aligned}} \quad (3)$$

Por el momento, escribimos esta fórmula como:

$$u(t_{k+1}) - y_{k+1} = h(1-\theta)\left[f(t_{k+1}, u(t_{k+1})) - f(t_{k+1}, y_{k+1})\right] + O(h^2).$$

$$\Rightarrow |e_{k+1}| \leq h(1-\theta)\left|f(t_{k+1}, u(t_{k+1})) - f(t_{k+1}, y_{k+1})\right| + O(h^2)$$

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ es Lipschitz} \\ \text{resp. a } y \end{array}\right) \Leftarrow \leq h(1-\theta)\, C \left|u(t_{k+1}) - y_{k+1}\right| + O(h^2)$$

$$\Rightarrow |e_{k+1}| \leq C h(1-\theta) |e_{k+1}| + O(h^2)$$

Esto implica que $|\ell_{k+1}| \leq \mathcal{O}(h^2)$ para todo $\theta \in [0,1]$

↳ el método es (por lo menos) de primer orden para todo $\theta \in [0,1]$.

Para ver si es de orden más alto para algún θ, volvemos a (3) y analizamos con más detalle el término en h^2. Haciendo un desarrollo de Taylor, tenemos $u''(t_{k+1}) = u''(t_k) + \mathcal{O}(h)$, por lo que

$$\frac{h^2}{2}\left[\theta u''(t_k) - (1-\theta) u''(t_{k+1})\right] = \frac{h^2}{2}(1-2\theta)\, u''(t_k) + \mathcal{O}(h^3).$$

↳ este término se vuelve $\mathcal{O}(h^3)$ solamente cuando $1-2\theta = 0$, es decir $\theta = 1/2$.

En conclusión, el método es de primer orden para todo $\theta \neq 1/2$, y de segundo orden si $\theta = 1/2$.

(Comentario: para $\theta = 1/2$, el método es el del trapecio.)