Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL
Métodos Numéricos

EXAMEN 16 DE DICIEMBRE DE 2023.

N° de examen	Apellido y Nombre	Cédula

El examen dura 3 horas. No se puede utilizar material.

Ejercicio 1. [30 puntos] Se quiere interpolar la función $f(x) = \log(1 + x)$ en el intervalo $[0, 1]$ usando $n + 1$ nodos equiespaciados en dicho intervalo,

$$x_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Explicar en qué consisten las siguientes opciones y escribir explícitamente las interpolantes resultantes para $n = 2$.

a) Interpolación polinomial con un único polinomio de grado lo más bajo posible.

b) Interpolación polinomial lineal a trozos.

c) Interpolación de Hermite cúbica a trozos.

[Puede ser útil tener en cuenta la siguiente fórmula para interpolantes cúbicas: si $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$p(x) = \left(\frac{3h_i s^2 - 2s^3}{h_i^3}\right) y_{i+1} + \left(\frac{h_i^3 - 3h_i s^2 + 2s^3}{h_i^3}\right) y_i + \frac{s^2(s-h_i)}{h_i^2} d_{i+1} + \frac{s(s-h_i)^2}{h_i^2} d_i,$$

donde $h_i := x_{i+1} - x_i$, y $s := x - x_i$.]

Ejercicio 2. [25 puntos] En este ejercicio, vamos a considerar las matrices

$$U = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

y el vector $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^t$.

a) Sea $A \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$ una matriz que tiene una factorización en valores singulares $A = U\Sigma V^t$. Usar esta factorización para hallar la solución al problema de mínimos cuadrados lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ de forma eficiente y estable. Determinar la norma euclídea del residuo óptimo.

b) Sea $\widetilde{A} \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$ una matriz con una factorización en valores singulares $\widetilde{A} = U\widetilde{\Sigma}V^t$. Hallar el rango de $\widetilde{A}$. Si se quiere resolver un problema de mínimos cuadrados lineal $\widetilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, ¿se pierde la existencia o la unicidad de soluciones? Justificar.

c) Encontrar todas las soluciones al problema de mínimos cuadrados lineal $\widetilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Determinar cuál es la solución con la menor norma euclídea.

Ejercicio 3. [20 puntos] Sean
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$
y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, consideramos el método iterativo
$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^k).$$

a) La iteración es convergente si y sólo si α está en un cierto intervalo. ¿Cuál es ese intervalo?

b) Hallar el valor de α para el que se espera que la iteración converja en la menor cantidad de pasos.

[Puede ser útil tener en cuenta que un número $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio de A si y sólo si $1 - \lambda$ es valor propio de $I - A$, y que $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio de A si y sólo si $\alpha\lambda$ es valor propio de αA ($\alpha \neq 0$).]

Ejercicio 4. [25 puntos] Sea $f\colon [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tan regular como sea necesario. Para resolver el problema de valores iniciales
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$
fijamos un valor $\theta \in [0, 1]$ y consideramos el método con paso $h > 0$ constante
$$y_{k+1} = y_k + h\left[\theta f(t_k, y_k) + (1-\theta) f(t_{k+1}, y_{k+1})\right].$$
En todos los pasos se utiliza el mismo valor de θ para computar la solución numérica.

a) ¿Para cuál o cuáles valores de θ el método es implícito?

b) ¿Para cuál o cuáles valores de θ el método es incondicionalmente absolutamente estable?

c) Discutir el orden del método según el valor de θ.

[Puede ser útil identificar métodos conocidos para ciertos valores de θ, como $\theta = 0$, $\theta = 1/2$, o $\theta = 1$.]