Universidad de la República - Facultad de Ingeniería

Examen de Métodos Numéricos - 11 de julio de 2023

Nombre completo:
Cédula:
Número de prueba:

Problema 1 (30 pt.)

Se considera una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de la forma: $y'(x) = f(x, y)$, con condición incial $y(x_0) = y_0$.

(10 pt.)a) Deduzca el método de Euler hacia atrás (EA), y calcule su región de estabilidad (como un método implícito).

(10 pt.)b) Exprese el método de EA como un par Predictor-Corrector. Utilice una sola iteración de corrección, y Euler hacia adelante como predictor.

(10 pt.)c) Se considera la EDO con $f(x, y) = xy^2$, y condición inicial $y(1) = 2$. Aplique el método anterior para estimar $y(1.25)$, usando paso $h = 1/4$. Exprese el resultado con 3 decimales.

Solución

La deducción del método, la definición de problema test y la región de estabilidad se encuentra en las notas de teórico.

1. El método de Euler hacia atrás es un método implícito, y viene dado por la siguiente iteración:

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{k+1} = y_k + hf\left(x_{k+1}, y_{k+1}\right), \ \forall\ k \geq 0 \end{cases}.$$

Para calcular su región de estabilidad, primero aplicamos el método al Problema Test, con lo que se obtiene (asumiendo $hq \neq 1$):

$$y_{k+1} = y_k + hqy_{k+1} \Leftrightarrow y_{k+1} = \left(\frac{1}{1-hq}\right) y_k.$$

Aplicando esta igualdad de forma recursiva, y usando que $y(0) = 1$:

$$y_{k+1} = \left(\frac{1}{1-hq}\right)^{k+1}, \ \forall\ k \geq 0.$$

La condición para que esta sucesión se mantenga acotada, es:

$$\left|\frac{1}{1-hq}\right| \leq 1 \Leftrightarrow |1-hq| \geq 1.$$

Gráficamente, estos son los puntos $z = hq \in \mathbb{C}$, tales que su distancia al punto $1 + 0i$ es al menos 1.

2. Para cada iteración en $k \geq 0$ (fija), la iteración Predictor-Corrector de EA, con predicción de Euler hacia adelante, es:

$$\begin{cases} y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf\left(x_k, y_k\right) & \text{Predictor Euler adelante} \\ y_{k+1}^{(i+1)} = y_k + hf\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(i)}\right), \ \forall\ i \geq 0 & \text{Corrector} \end{cases}.$$

Si se utiliza una sola iteración de corrección, se obtiene:

$$\begin{cases} y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf\left(x_k, y_k\right) & \text{Predictor Euler adelante} \\ y_{k+1}^{(1)} = y_k + hf\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(0)}\right) & \text{Corrector } i = 1 \end{cases}.$$

Por lo tanto, la iteración en k del método obtenido, es:

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_{k+1}, y_k + hf\left(x_k, y_k\right)\right), \ \forall \ k \geq 0.$$

3. Como $x_0 = 1$ y $h = 1/4$, queremos estimar la solución en: $x_1 = x_0 + h$. Este es el valor estimado por el método en la primera iteración ($k = 0$):

$$y_1 = y_0 + hf\left(x_1, y_0 + hf\left(x_0, y_0\right)\right) = 2 + \frac{1}{4} f\left(\frac{5}{4}, 2 + \frac{1}{4} f\left(1, 2\right)\right).$$

Usando que $f(x, y) = xy^2$, se obtiene:

$$y_1 = 2 + \frac{1}{4} f\left(\frac{5}{4}, 2 + \frac{1}{4} f\left(1, 2\right)\right) = 2 + \frac{1}{4} f\left(\frac{5}{4}, 3\right) = 2 + \left(\frac{5}{16}\right) 3^2 = \frac{77}{16} \simeq 4.8125.$$

Como comparación, la solución exacta del PVI es:

$$y(x) = \frac{2}{2 - x^2}, \ |x| < \sqrt{2} \Rightarrow y(1.25) \simeq 4.5714.$$

Problema 2 (30 pt.)
Se considera el modelo lineal $y(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i \phi_i(t)$ donde ϕ_i son funciones dadas linealmente independientes y a_i son los parámetros del modelo. Se tienen además n datos experimentales $\{(t_k, y_k), k = 1, ..., n\}$, con $m \ll n$.

(10 pt.)a) Escriba el problema de mínimos cuadrados lineal (PMCL) asociado, la matriz A y los vectores x y b del mismo, explicando cómo llega a ellos.

(10 pt.)b) Deduzca las *Ecuaciones Normales* y demuestre que las soluciones de las mismas son solución del PMCL.

(10 pt.)c) Se tienen los 4 datos experimentales $\{(-1, 1.4), (0, 0.2), (1.3, 0.5), (1.9, 2.4)\}$ y el modelo $y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Plantee el PMCL mostrando quiénes son A, b, resuelva el mismo y halle a_0, a_1, a_2. Escriba sus valores con 3 decimales.

Solución

a) **Ver teórico**.

La matriz A es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1.3 & 1.69 \\ 1 & 1.9 & 3.61 \end{pmatrix}$, el vector b es $b = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 0.2 \\ 0.5 \\ 2.4 \end{pmatrix}$

b) **Ver teórico**.

c) La matriz $A^t \ . \ A$ queda

$$A^t \ . \ A = \begin{pmatrix} 4 & 2.2 & 6.3 \\ 2.2 & 6.3 & 8.056 \\ 6.3 & 8.056 & 16.888 \end{pmatrix}$$

El vector $A^t \ . \ b$ es $A^t \ . \ b = \begin{pmatrix} 4.500 \\ 3.810 \\ 10.909 \end{pmatrix}$

Los valores de los coeficientes son $a_0 = -0.019$, $a_1 = -0.573$, $a_2 = 0.927$.

Problema 3 (40 pt.)

a) Defina el radio espectral ρ de una matriz cuadrada y, pruebe que, para $\mathbb{A}_{n\times n}$, toda norma operador de $\mathbb{A}$ está acotada inferiormente por su radio espectral.

b) Sea $\mathbb{A}_{n\times n}$ no singular, considere el sistema $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$, con $\mathbb{X}_{n\times 1}$, $\mathbb{B}_{n\times 1}$. Llamemos $\mathbb{X}^*$ a la solución de dicho sistema. Para estimar $\mathbb{X}^*$ se propone la siguiente iteración: $\mathbb{X}^{(k+1)} = \mathbb{Q}\mathbb{X}^{(k)} + \mathbb{C}$, con $\mathbb{C}_{n\times 1}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ y donde $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{C}$ son tales que $\mathbb{X}^* = \mathbb{Q}\mathbb{X}^* + \mathbb{C}$. Demuestre que si $|\rho(\mathbb{Q})| < 1$ la sucesión $\{\mathbb{X}^{(k)}\}$ así generada converge a $\mathbb{X}^*$. Puede asumirse para esta parte que el radio espectral es el ínfimo de la norma operador.

c) Demuestre que el método de Jacobi es un caso particular de la iteración de la parte anterior, explicando cómo quedan $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{C}$.

d) Usando Jacobi y dado el sistema $\begin{cases} 5x + 2y - z & = 8 \\ 10x + y - 5z & = 0 \\ x - y - z & = 1 \end{cases}$, partiendo de $\mathbb{X}^{(0)} = (0, 0, 0)$ calcule $\mathbb{X}^{(k)}$, $k = 1, 2$, y exprese los resultados con 3 decimales.

Solución
Las partes a),b)y c) se ven en el teórico
Veamos la parte d.

La matriz de iteración $Q_J = -D^{-1}(L+U)$ es $Q_J = \begin{pmatrix} 0 & -2/5 & 1/5 \\ -10 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

El término $r_J = D^{-1}b$ es $D^{-1}b = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Como $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, nos queda $x^1 = r_j = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, luego

$$x^2 = Q_J x^1 + r_J = \begin{pmatrix} 0 & -2/5 & 1/5 \\ -10 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8/5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8/5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ -21 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.400 \\ -21.000 \\ 0.600 \end{pmatrix}$$