1. Solución de ejercicio 1

a) Ver teórico.

b) Ver teórico.

c) Ver teórico.

d) El sistema planteado puede reescribirse como

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

por lo que puede separarse en

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_1(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2' = -y_2 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

dos problemas de la forma del Problema Test, con $q_1 = 2$ y $q_2 = -1$ respectivamente.

Recordando que la región de estabilidad del método del trapecio es $R = \{z = hq \in \mathbb{C} : Re(z) \leq 0\}$, el único valor $h \geq 0$ que garantiza $\mathrm{Re}(hq_1) = 2h \leq 0$ y $\mathrm{Re}(hq_1) = -h \leq 0$ es $h = 0$.

2. Solución de ejercicio 2

a) Por letra, la siguiente igualdad se cumple para todo $h > 0$:

$$\bar{p}(h) = p + a_k h^k + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i h^i$$

En particular se cumple para h/q, con $q > 1$ cualquiera:

$$\bar{p}(h/q) = p + a_k h^k/q^k + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i h^i/q^i.$$

Por lo tanto:

$$q^k \bar{p}(h/q) - \bar{p}(h) = \left(q^k - 1\right) p + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i h^i \left(q^k/q^i - 1\right).$$

Dividiendo a ambos lados por $q^k - 1$, se obtiene el estimador de Richardson:

$$\hat{p}(h) := \frac{q^k \bar{p}(h/q) - \bar{p}(h)}{q^k - 1} = p + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i h^i \left(\frac{q^k/q^i - 1}{q^k - 1}\right).$$

b) De la igualdad anterior, se deduce que el estimador de Richardson tiene error de truncamiento de orden $i \geq k+1$; donde i es el menor índice tal que $a_i \neq 0$. En particular es de orden $k+1$ si $a_{k+1} \neq 0$.

c) Taylor de orden cuatro en el punto a:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} + f^{(3)}(a)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(a)\frac{h^4}{4!} + O(h^5).$$

La igualdad vale para cualquier $h \in \mathbb{R}$. Evaluando en $-h$, se obtiene:

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} - f^{(3)}(a)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(a)\frac{h^4}{4!} + \hat{O}(h^5).$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$f(a+h)+f(a-h) = 2f(a)+f''(a)h^2+2f^{(4)}(a)\frac{h^4}{4!}+\left(O(h^5)+\hat{O}(h^5)\right).$$

Despejando la derivada segunda:

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} = f''(a) + 2f^{(4)}(a)\frac{h^2}{4!} + O(h^3).$$

Si $f^{(4)}(a) \neq 0$, el estimador tiene error de truncamiento de orden dos. De lo contrario el orden es mayor a dos.

d) Como T es un estimador de orden $k=2$, el estimador de Richardson asociado a T, es (para $q > 1$):

$$\hat{T}(h) = \frac{q^2 T(h/q) - T(h)}{q^2 - 1} =$$

$$\frac{1}{q^2-1}\left(q^4 \frac{f(a+h/q) - 2f(a) + f(a-h/q)}{h^2} - \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}\right).$$

3. Solución de ejercicio 3

a) Ver teórico.

b) $Q_k = R(\alpha_k, \beta_k) + \mathbb{J}_R(\alpha_k, \beta_k)\left[(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) - (\alpha_k, \beta_k)\right]^T$, donde R es el residuo entre el modelo $f(x_i)$ y los valores de y_i, para los elementos i del conjunto A. Por lo tanto:

$$R(\alpha_k, \beta_k) = \begin{pmatrix} \sin(-\alpha_k)e^{-\beta_k} - 2 \\ \sin(2\alpha_k)e^{2\beta_k} + 1 \\ \sin(\alpha_k)e^{\beta_k} + 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbb{J}_R(\alpha_k, \beta_k) = \begin{pmatrix} -\cos(-\alpha_k)e^{-\beta_k} & -\sin(-\alpha_k)e^{-\beta_k} \\ 2\cos(2\alpha_k)e^{2\beta_k} & 2\sin(2\alpha_k)e^{2\beta_k} \\ \cos(\alpha_k)e^{\beta_k} & \sin(\alpha_k)e^{\beta_k} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se tiene la siguiente expresión de Q_k

$$Q_k = \begin{pmatrix} \sin(-\alpha_k)e^{-\beta_k} - 2 \\ \sin(2\alpha_k)e^{2\beta_k} + 1 \\ \sin(\alpha_k)e^{\beta_k} + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos(-\alpha_k)e^{-\beta_k} & -\sin(-\alpha_k)e^{-\beta_k} \\ 2\cos(2\alpha_k)e^{2\beta_k} & 2\sin(2\alpha_k)e^{2\beta_k} \\ \cos(\alpha_k)e^{\beta_k} & \sin(\alpha_k)e^{\beta_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{k+1} - \alpha_k \\ \beta_{k+1} - \beta_k \end{pmatrix}$$

c) De la parte anterior tenemos que $Q_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_0$, donde $P_0 = \left[(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) - (\alpha_k, \beta_k)\right]^T$. Se tiene entonces la siguiente formulación del problema de mínimos cuadrados lineal.

$\hat{Q}_0 = \text{mín}_{P_0 \in \mathbb{R}^2} \|Q_0\|_2^2 = \text{mín}_{P_0 \in \mathbb{R}^2} \| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_0\|_2^2 = \text{mín}_{P_0 \in \mathbb{R}^2} \|AP_0 - b\|_2^2$.

Utilizando las Ecuaciones Normales para resolver el problema de mínimos cuadrados lineal, tenemos analíticamente que $P_0 = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b$, pero como invertir matrices es numéricamente algo a evitar cada vez que se pueda, lo que hacemos es resolver el sistema $A^T A P_0 = A^T b$, obteniendo $P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi+1}{2} = 2{,}571, \beta_1 = \frac{1}{2} = 0{,}500$.