Universidad de la República - Facultad de Ingeniería

Examen de Métodos Numéricos
23 de febrero de 2023
Duración: 3 horas
El repartido consta de 8 carillas impresas.

Nombre completo:
Cédula:
Número de lista:

Observaciones:	- Las hojas del repartido entregado deben mantenerse engrapadas durante toda la evaluación. - Todas las respuestas deben estar contenidas en el repartido entregado; no se aceptarán hojas adicionales. - Solamente se tomarán en cuenta las resoluciones de los problemas que se encuentren debajo de su correspondiente enunciado. - Solamente está permitido el uso de calculadoras estándar. - No está permitido el uso de material adicional. - La evaluación está basada en un esquema de 100 puntos, donde el puntaje mínimo para la aprobación es de 60.

Problema 1 (30 pt.)

Considere la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y' = f(y,x) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

a) Integre la ecuación anterior para obtener el método del trapecio.

b) Defina estabilidad numérica y Problema Test.

c) Halle y grafique en el plano complejo la región de estabilidad del método del trapecio.

d) Para el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, encuentre el paso $h \geq 0$ que garantiza la estabilidad numérica del método del trapecio.

$$Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Y$$

$$Y(0) = (1,1)^t$$

Problema 2 (30 pt.)

Sea $\bar{p}(h)$ un estimador de cierto valor desconocido $p \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\bar{p}(h) = p + a_k h^k + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i h^i, \ \forall \ h > 0 \quad \text{(se asume } a_k \neq 0\text{)}.$$

a) Deduzca el estimador de Richardson $\hat{p}(h)$, a partir del estimador original $\bar{p}(h)$. Utilice pasos h y h/q, con $q > 1$ genérico.

b) ¿Cuál es el orden del error de truncamiento del estimador de Richardson obtenido? Discuta en función de los coeficientes a_i.

c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f \in C^{\infty}$. Se considera el siguiente estimador de la derivada segunda de f en un punto $a \in \mathbb{R}$:

$$T(h) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}, \; h > 0.$$

Supongamos que $f^{(4)}(a) \neq 0$. Pruebe que T tiene error de truncamiento de orden dos. Sugerencia: usar Taylor de orden cuatro.

d) Obtenga el estimador de Richardson $\hat{T}$, asociado al estimador T. Utilice pasos h y h/q, con $q > 1$ genérico.

Problema 3 (40 pt.)

a) Explique la resolución del problema de mínimos cuadrados no lineal a través del algoritmo de Gauss-Newton. Concluya presentando el pseudocódigo de ese algoritmo, explicando cada una de las líneas.

b) Sea $A = \{(-1,1),(2,1),(1,0)\}$ un conjunto de datos y $f(x) = \sin(\alpha x)e^{\beta x} + x$, donde α y β son los parámetros que se pretenden ajustar a través del algoritmo de Gauss-Newton. Sea $\hat{Q}_k$ la formulación del problema de mínimos cuadrados lineal que se resuelve en el k-ésimo paso de iteración del problema de mínimos cuadrados no lineal a través de Gauss-Newton para A y f.

$$\hat{Q}_k = \min \|Q_k\|_2^2$$

Calcule Q_k, que es la función objetivo del problema de mínimos cuadrados lineal que comprende el algoritmo de Gauss-Newton. Dejar la expresión como producto de vectores y/o matrices, sin necesidad de simplificar los productos, indicando explícitamente la dependencia de Q_k con α_{k+1} y β_{k+1}.

c) Calcule α_1 y β_1, tomando como valores iniciales $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ y $\beta_0 = 0$ (escriba los resultados con tres decimales).