Universidad de la República - Facultad de Ingeniería

Examen de Métodos Numéricos
6 de febrero de 2023
Duración: 3 horas
El repartido consta de 8 carillas impresas.

Nombre completo:
Cédula:

Observaciones:	- Las hojas del repartido entregado deben mantenerse engrapadas durante toda la evaluación. - Todas las respuestas deben estar contenidas en el repartido entregado; no se aceptarán hojas adicionales. - Solamente se tomarán en cuenta las resoluciones de los problemas que se encuentren debajo de su correspondiente enunciado. - Solamente está permitido el uso de calculadoras estándar. - No está permitido el uso de material adicional. - La evaluación está basada en un esquema de 100 puntos, donde el puntaje mínimo para la aprobación es de 60.

Problema 1 (40 pt.)

Considere un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde A es una matriz cuadrada invertible, y A no posee elementos nulos en su diagonal.

a) Mostrar que el método de Jacobi se puede expresar en la forma $x^{(x+1)} = Qx^{(k)} + r$. Expresar Q y r en función de A y b.

b) Probar que el vector de errores verifica: $e^{(k+1)} = Q^{k+1}e^{(0)}, \forall k \geq 0$.

c) Se considera ahora el sistema lineal $Ax = b$, con $b = (0, 1, 1)^t$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Para este sistema, cuya solución es $\alpha = (0, -1, -1)^t$, determine Q y r de Jacobi.

d) Encontrar un vector inicial $x^{(0)}$ tal que la sucesión de Jacobi no converge a α. *Sugerencia: trabajar con las potencias pares de Q.*

e) Expresar la matriz Q_w del método de Jacobi relajado en función de w. ¿Existe $w > 0$ tal que la relajación sea convergente para todo $x^{(0)}$? Justificar.

Problema 2 (30 pt.)

a) Enunciar el Teorema del Error por Interpolación Polinómica.

b) Se considera $f : f(x) = e^x$ definida en el intervalo $[0, 1]$. Para cada entero positivo n, expresar el polinomio interpolante $p_n(x)$ de f por las $n+1$ abscisas equiespaciadas $\{\frac{i}{n}, i = 0, \ldots, n\}$.

c) Sea $\{E_n\}_{n\geq 1}$ la sucesión de errores: $E_n = \max_{x\in[0,1]} |p_n(x) - f(x)|$. Estudiar acotación de $\{E_n\}_{n\geq 1}$.

d) Investigue si la familia de polinomios $\{p_n\}$ converge uniformemente a f en $[0,1]$.
Recordatorio: decimos que $g_n : M \to \mathbb{R}^n$ *converge uniformemente a* $g : M \to \mathbb{R}^n$ *si dado* $\epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) :$ $n > n_0 \Rightarrow \|g_n(x) - g(x)\| < \epsilon, \forall x \in M$.
Sugerencia: estudiar el límite de la sucesión $\{E_n\}_{n\geq 1}$.

Problema 3 (30 pt.)

a) Deduzca el Método de Newton-Raphson (NR) para encontrar una raíz α de la ecuación $f(X) = \vec{0}$, con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

b) Indique una condición suficiente para garantizar la convergencia del método anterior a una raíz α.

c) Sea $f(x, y) = (x + 2y^2 - 1, 1 - 4y)$. Partiendo de $X_0 = (0, 0)$, calcule X_1 aplicando NR.

d) Calcule la raíz exacta de $f(x, y) = 0$ y analice la convergencia de NR a dicha raíz. ¿Es $X = (0, 0)$ un punto de partida adecuado? Justifique.