Resolución del Examen Diciembre 2022

1 Resolución

Problema 1)

a) Ver teórico.

b) Ver teórico.

c) Operando, tenemos $Q_J = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Su polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2 + 4$, con raíces $\lambda = \pm 2i$.

Ambas raíces tienen módulo 2, por lo que $\rho(Q_J) = 2$, el radio espectral es mayor a 1 y por tanto Jacobi no converge.

d) La matriz de iteración del método relajado es $Q_{JOR} = wQ_J + (1-w)I$, con valores propios $z = w\lambda + (1-w)1$.

Tenemos que $|z| < 1$ sii $(1-w)^2 + 4w^2 < 1$ sii $5w^2 - 2w < 0$ sii $w \in (0, \frac{2}{5})$.

Por tanto $(a, b) = (0, \frac{2}{5})$.

Problema 2)

a) Ver teórico.

b) Tenemos $g(x) = ax + b\frac{f(x)}{f'(x)}$.

Para que la sucesión $\{x_n\}$ tenga límite α, debe cumplirse que (g y f son continuas): $\alpha = a\alpha + b\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$.

Como $f(\alpha) = 0$, tenemos que $a = 1$

Derivando obtenemos $g'(\alpha) = a + b$ y $g''(\alpha) = -b\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$.

Tomando $a = 1,\ b = -1$ tenemos $g'(\alpha) = 0$ y $g''(\alpha) = \frac{-f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$, es Newton-Raphson.

c) Tenemos $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \quad x_n - \left(\dfrac{\log(x_n) + \frac{x}{2}}{\frac{1}{x_n} + \frac{1}{2}} \right) \end{cases}$

Operando, obtenemos $x_1 = \frac{2}{3}$ y $x_2 = \frac{2}{3} - \frac{\log(\frac{2}{3}) + \frac{1}{3}}{2}$, que redondeados a tres decimales nos da $x_1 = 0.667,\ x_2 = 0.703$.

Problema 3)

a) Utilizando el método de Lagrange:

$$l_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$l_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = -x^2+1$$

$$l_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x^2+x}{2}$$

Luego, como $y_0 = f(-1) = \frac{1}{26}$, $y_1 = f(0) = 1$, $y_2 = f(1) = \frac{1}{26}$, se tiene:

$$P_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) = -\tfrac{25}{26}x^2 + 1 \approx -0.962x^2 + 1$$

b) Primero se halla $P_3(x)$, el polinomio que interpola a f por las abscisas $\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1\}$, a partir de $P_2(x)$, como sigue:

$$P_3(x) = P_2(x) + q_2(x),$$

donde $q_2(x) = a_2(x+1)(x-0)(x-1)$. Imponiendo que $P_3(\frac{1}{2}) = P_2(\frac{1}{2}) + q_2(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{1+\frac{25}{4}}$, se halla $a_2 \approx 1.658$. Luego

$$P_3(x) = -0.962x^2 + 1 + 1.658x(x+1)(x-1)$$

c) Ver teórico.

d) Ver teórico.