Universidad de la República - Facultad de Ingeniería

Examen de Métodos Numéricos
15 de diciembre de 2022
Duración: 3 horas
El repartido consta de 9 carillas impresas.

Nombre completo:
Cédula:

Observaciones:	- Las hojas del repartido entregado deben mantenerse engrapadas durante toda la evaluación. - Todas las respuestas deben estar contenidas en el repartido entregado; no se aceptarán hojas adicionales. - Solamente se tomarán en cuenta las resoluciones de los problemas que se encuentren debajo de su correspondiente enunciado. - Solamente está permitido el uso de calculadoras estándar. - No está permitido el uso de material adicional. - La evaluación está basada en un esquema de 100 puntos, donde el puntaje mínimo para la aprobación es de 60.

Problema 1 (40 pt.)

Considere el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde A es una matriz cuadrada e invertible.

a) Deduzca el método de Jacobi y expréselo matricialmente.

b) Demuestre que si A es diagonal dominante estricta por filas, entonces el método de Jacobi converge para toda condición inicial.

c) Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ determine si Jacobi converge para toda condición inicial.

d) Para la matriz anterior, determine si alguna relajación de Jacobi converge. En caso afirmativo, encuentre el intervalo (a, b) tal que si $w \in (a, b)$ la relajación converge.

Problema 2 (30 pt.)

a) Enuncie y demuestre el teorema de órden de convergencia para el MIG asociado a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Se considera el siguiente esquema: $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = & a x_n + b \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$; donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^p$, con una raíz α tal que $f'(\alpha) \neq 0$.

Encuentre los valores de a y b para los cuales el método anterior converge a α, y además lo hace con el mayor orden de convergencia posible.

$a =$	$b =$

c) Sean $f : f(x) = \log(x) + \frac{x}{2}$, $x_0 = 1$. Usando los valores de la parte anterior, calcule x_1 y x_2 (trabaje con tres cifras después de la coma).

$x_1 =$	$x_2 =$

Problema 3 (30 pt.)

Considere la función de Runge: $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$.

a) Halle el polinomio $P_1(x)$ que interpola a f por las abscisas $\{-1, 0, 1\}$.

$P_1(x) =$

b) Utilice el método de Newton para hallar el polinomio $P_2(x)$ que interpola a f por las abscisas $\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1\}$.

$P_2(x) =$

c) Enuncie el teorema de acotación del error en interpolación polinómica.

d) Explique el fenómeno de Runge, e indique cómo se podría disminuir este efecto.