Universidad de la República - Facultad de Ingeniería

Examen de Métodos Numéricos
25 de febrero de 2022
Duración: 3 horas
El repartido consta de 7 carillas impresas.

Nombre completo:
Cédula:

Observaciones:	- Las hojas del repartido entregado deben mantenerse engrapadas durante toda la evaluación. - Todas las respuestas deben estar contenidas en el repartido entregado; no se aceptarán hojas adicionales. - Solamente se tomarán en cuenta las resoluciones de los problemas que se encuentren debajo de su correspondiente enunciado. - Solamente está permitido el uso de calculadoras estándar. - No está permitido el uso de material adicional. - La evaluación está basada en un esquema de 100 puntos, donde el puntaje mínimo para la aprobación es de 60.

Problema 1 (40 pt.)

a) Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con una raíz x^*, con $f''(x)$ continua, y tal que $f'(x^*) \neq 0,\ f''(x^*) \neq 0$. Explique el método de Newton-Raphson (qué problema resuelve, en qué consiste dicho método).
Solución: Ver teórico (p. 57).

b) Explique el método de Newton-Raphson ahora para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, incluyendo el pseudocódigo del algoritmo resultante.
Solución: Ver teórico (p. 70).

c) Para el método de la parte *a*), defina orden y velocidad de convergencia. Deduzca dicho orden y velocidad. Justifique.
Solución: Ver teórico (p. 59).

d) Se desea resolver el sistema $\begin{cases} xy - z^2 & = 0 \\ y^2 - xz & = 0 \\ 2x^2 - xyz & = 1 \end{cases}$ partiendo de $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Siguiendo el método de la parte *b*), calcule $X^{(1)}$ y $X^{(2)}$ (escriba los resultados con tres decimales).

$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$
1	0.667	0.722
1	0.333	-0.028
0	-0.333	-0.167

Solución:

Tenemos $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y, z) = (xy - z^2, y^2 - xz, 2x^2 - xyz - 1)$ y queremos hallar $X^* \in \mathbb{R}^3$ tal que $F(X^*) = \mathbb{O}$.

El método N-R puede escribirse como:

$$\begin{cases} X^{(k+1)} = & X^{(k)} - \mathbb{J}_F(X^{(k)})^{-1}F(X^{(k)}) \\ \quad X^{(0)} \in & \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Para no tener que hallar la matriz inversa (problema mal condicionado, en la práctica NUNCA se invierte una matriz), recordemos que calcular $A^{-1}b$ equivale a resolver el sistema lineal $Ax = b$, ya que precisamente $x = A^{-1}b$.

Por tanto dado $X^{(k)}$ resolvemos el sistema $\mathbb{J}_F(X^{(k)})S^{(k)} = -F(X^{(k)})$, con lo que $X^{(k+1)} = X^{(k)} + S^{(k)}$.

La matriz jacobiana en un punto genérico es $\mathbb{J}_F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y & x & -2z \\ -z & 2y & -x \\ 4x - yz & -xz & -xy \end{pmatrix}$

$X^{(1)}$: Primero hallamos $S^{(0)}$ resolviendo el sistema $\mathbb{J}_F(X^{(0)})S^{(0)} = -F(X^{(0)})$. Una vez hallado $S^{(0)}$ calculamos $X^{(1)} = X^{(0)} + S^{(0)}$.

$$\mathbb{J}_F(1, 1, 0)S^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -F(1, 1, 0) = -F(X^{(0)}).$$

Resolviendo el sistema obtenemos $S^{(0)} = (-1/3, -2/3, -1/3)^t$, por tanto $X^{(1)} = (1, 1, 0)^t + (-1/3, -2/3, -1/3)^t = (2/3, 1/3, -1/3)^t$.

$X^{(2)}$: Primero hallamos $S^{(1)}$ resolviendo el sistema $\mathbb{J}_F(X^{(1)})S^{(1)} = -F(X^{(1)})$. Una vez hallado $S^{(1)}$ calculamos $X^{(2)} = X^{(1)} + S^{(1)}$.

$$\mathbb{J}_F(2/3, 1/3, -1/3)S^{(1)} = \begin{pmatrix} 3/9 & 6/9 & 6/9 \\ 3/9 & 6/9 & -6/9 \\ 25/9 & 2/9 & -2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ -3/9 \\ 1/27 \end{pmatrix} = -F(2/3, 1/3, -1/3) = -F(X^{(1)}).$$

Sacando 1/9 de factor común en ambos lados de la igualdad tenemos que el sistema a resolver equivale a

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & -6 \\ 25 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema obtenemos $S^{(1)} = (1/18, -13/36, 1/6)^t$, por tanto $X^{(2)} = (2/3, 1/3, -1/3)^t + (1/18, -13/36, 1/6)^t = (13/18, -1/36, -1/6)^t$.

Redondeando a tres decimales obtenemos $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.667 \\ 0.333 \\ -0.333 \end{pmatrix}$ y $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.722 \\ -0.028 \\ -0.167 \end{pmatrix}$

Problema 2 (30 pt.)

Se quiere estimar un número $p \in \mathbb{R}$ usando el estimador $\bar{p}(h)$, que tiene error de truncamiento de orden k:

$$\bar{p}(h) = p + a_k h^k + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i h^i$$

a) Explique cómo aplicar la extrapolación de Richardson para obtener un nuevo estimador, $\hat{p}(h)$, con mejor error de truncamiento.
Solución: Ver teórico (p. 16).

b) Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ y dado $a \in \mathbb{R}$, se quiere estimar $f'(a)$ usando el siguiente estimador $\delta_a(h)$:

$$\delta_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Calcule el error de truncamiento y aplique la extrapolación de Richardson, con $q = 2$, para obtener un nuevo estimador $\hat{\delta}_a(h)$.

Solución: Ver teórico (p. 13).

$$\hat{\delta}_a(h) = \frac{q^k \delta_a(\frac{h}{q}) - \delta_a(h)}{q^k - 1} = \frac{\frac{2[f(a+\frac{h}{2}) - f(a)]}{\frac{h}{2}} - \frac{[f(a+h) - f(a)]}{h}}{2^1 - 1}$$

Resultando

$$\hat{\delta}_a(h) = \frac{4f(a+\frac{h}{2}) - f(a+h) - 3f(a)}{h}$$

c) En el contexto de la parte (b), tomando $f(x) = x^3$ y $a = 1$, calcule $\delta_a\left(\frac{1}{2}\right)$ y $\hat{\delta}_a\left(\frac{1}{2}\right)$ (escriba los resultados con tres decimales).

$$\boxed{\delta_a\left(\tfrac{1}{2}\right) = 4.750}$$

$$\boxed{\hat{\delta}_a\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2.875}$$

Solución:
$a = 1$ y $h = \frac{1}{2}$:

$$\delta_a(\tfrac{1}{2}) = \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \frac{(1+\frac{1}{2})^3 - 1}{\frac{1}{2}} = 4.750$$

$$\hat{\delta}_a(\tfrac{1}{2}) = \frac{4(a+\frac{h}{2})^3 - (a+h)^3 - 3a^3}{h} = \frac{4(1+\frac{1}{4})^3 - (1+\frac{1}{2})^3 - 3}{\frac{1}{2}} = 2.875$$

Problema 3 (30 pt.)

a) Explique la resolución del problema de mínimos cuadrados no lineal a través del algoritmo de Gauss-Newton. Concluya presentando el pseudocódigo de ese algoritmo, explicando cada una de las líneas.
Solución: Ver teórico (p. 92).

b) Sea $A = \{(-1,1),(2,0),(0,-1),(3,2)\}$ un conjunto de datos y $f(x) = 2\alpha e^{\beta x} + \gamma x^2$, donde α, β y γ son los parámetros que se pretenden ajustar a través del algoritmo de Gauss-Newton. Sea $\hat{Q}_k$ la formulación del problema de mínimos cuadrados lineal que se resuelve en el k-ésimo paso de iteración del problema de mínimos cuadrados no lineal a través de Gauss-Newton para A y f.

$$\hat{Q}_k = \min \|Q_k\|_2^2$$

Calcule Q_k, que es la función objetivo del problema de mínimos cuadrados lineal que comprende el algoritmo de Gauss-Newton (puede dejar la expresión como producto de vectores y/o matrices, sin necesidad de simplificar los productos), indicando explícitamente la dependencia de Q_k con $\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}$ y γ_{k+1}.

Solución:

$Q_k = R(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) + \mathbb{J}_R(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)((\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}, \gamma_{k+1}) - (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k))^T$, donde R es el residuo entre el modelo $f(x_i)$ y los valores de y_i para los i elementos del conjunto A. Por lo tanto:

$$R(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) = \begin{pmatrix} 2\alpha_k e^{-\beta_k} + \gamma_k - 1 \\ 2\alpha_k e^{2\beta_k} + 4\gamma_k \\ 2\alpha_k + 1 \\ 2\alpha_k e^{3\beta_k} + 9\gamma_k - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{J}_R(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) = \begin{pmatrix} 2e^{-\beta_k} & -2\alpha_k e^{-\beta_k} & 1 \\ 2e^{2\beta_k} & 4\alpha_k e^{2\beta_k} & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2e^{3\beta_k} & 6\alpha_k e^{3\beta_k} & 9 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto se obtiene la siguiente expresión de Q_k

$$\boxed{Q_k = \begin{pmatrix} 2\alpha_k e^{-\beta_k} + \gamma_k - 1 \\ 2\alpha_k e^{2\beta_k} + 4\gamma_k \\ 2\alpha_k + 1 \\ 2\alpha_k e^{3\beta_k} + 9\gamma_k - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^{-\beta_k} & -2\alpha_k e^{-\beta_k} & 1 \\ 2e^{2\beta_k} & 4\alpha_k e^{2\beta_k} & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2e^{3\beta_k} & 6\alpha_k e^{3\beta_k} & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{k+1} - \alpha_k \\ \beta_{k+1} - \beta_k \\ \gamma_{k+1} - \gamma_k \end{pmatrix}}$$

c) Calcule α_1, β_1 y γ_1, tomando como valores iniciales $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ y $\gamma_0 = -1$ (escriba los resultados con tres decimales).

α_0	α_1
1	0.027

β_0	β_1
1	1.007

γ_0	γ_1
-1	-0.002

Solución: De la parte anterior, tenemos que $Q_0 = \begin{pmatrix} 2e^{-1}-2 \\ 2e^2-4 \\ 1 \\ 2e^3-11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^{-1} & -2e^{-1} & 1 \\ 2e^2 & 4e^2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2e^3 & 6e^3 & 9 \end{pmatrix} P_0$, donde $P_0 = ((\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}, \gamma_{k+1}) - (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k))^T$. Se tiene entonces la siguiente formulación del problema de mínimos cuadrados lineal

$$\hat{Q}_0 = \min_{P_0 \in \mathbb{R}^3} \|Q_0\|_2^2 = \min_{P_0 \in \mathbb{R}^3} \left\| \begin{pmatrix} 2e^{-1}-2 \\ 2e^2-4 \\ 1 \\ 2e^3-11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^{-1} & -2e^{-1} & 1 \\ 2e^2 & 4e^2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2e^3 & 6e^3 & 9 \end{pmatrix} P_0 \right\|_2^2 = \min_{P_0 \in \mathbb{R}^3} \|AP_0 - b\|_2^2$$

Utilizando las Ecuaciones Normales para resolver el problema de mínimos cuadrados lineal, tenemos que $P_0 = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b = (-0.973, 0.007, 0.998)^T$. Por lo tanto, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)^T = P_0 + (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)^T = (0.027, 1.007, -0.002)^T$.