Universidad de la República - Facultad de Ingeniería

Examen de Métodos Numéricos
25 de febrero de 2022
Duración: 3 horas
El repartido consta de 7 carillas impresas.

Nombre completo:
Cédula:

Observaciones:	- Las hojas del repartido entregado deben mantenerse engrapadas durante toda la evaluación. - Todas las respuestas deben estar contenidas en el repartido entregado; no se aceptarán hojas adicionales. - Solamente se tomarán en cuenta las resoluciones de los problemas que se encuentren debajo de su correspondiente enunciado. - Solamente está permitido el uso de calculadoras estándar. - No está permitido el uso de material adicional. - La evaluación está basada en un esquema de 100 puntos, donde el puntaje mínimo para la aprobación es de 60.

Problema 1 (40 pt.)

a) Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con una raíz x^*, con $f''(x)$ continua, y tal que $f'(x^*) \neq 0,\ f''(x^*) \neq 0$. Explique el método de Newton-Raphson (qué problema resuelve, en qué consiste dicho método).

b) Explique el método de Newton-Raphson ahora para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, incluyendo el pseudocódigo del algoritmo resultante.

c) Para el método de la parte a), defina orden y velocidad de convergencia. Deduzca dicho orden y velocidad. Justifique.

d) Se desea resolver el sistema $\begin{cases} xy - z^2 &= 0 \\ y^2 - xz &= 0 \\ 2x^2 - xyz &= 1 \end{cases}$ partiendo de $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Siguiendo el método de la parte b), calcule $X^{(1)}$ y $X^{(2)}$ (escriba los resultados con tres decimales).

$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$
1		
1		
0		

Problema 2 (30 pt.)

Se quiere estimar un número $p \in \mathbb{R}$ usando el estimador $\bar{p}(h)$, que tiene error de truncamiento de orden k:

$$\bar{p}(h) = p + a_k h^k + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i h^i$$

a) Explique cómo aplicar la extrapolación de Richardson para obtener un nuevo estimador, $\hat{p}(h)$, con mejor error de truncamiento.

b) Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ y dado $a \in \mathbb{R}$, se quiere estimar $f'(a)$ usando el siguiente estimador $\delta_a(h)$:

$$\delta_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Calcule el error de truncamiento y aplique la extrapolación de Richardson, con $q = 2$, para obtener un nuevo estimador $\hat{\delta}_a(h)$.

c) En el contexto de la parte (b), tomando $f(x) = x^3$ y $a = 1$, calcule $\delta_a\left(\frac{1}{2}\right)$ y $\hat{\delta}_a\left(\frac{1}{2}\right)$ (escriba los resultados con tres decimales).

$\delta_a\left(\frac{1}{2}\right)=$

$\hat{\delta}_a\left(\frac{1}{2}\right)=$

Problema 3 (30 pt.)

a) Explique la resolución del problema de mínimos cuadrados no lineal a través del algoritmo de Gauss-Newton. Concluya presentando el pseudocódigo de ese algoritmo, explicando cada una de las líneas.

b) Sea $A = \{(-1,1),(2,0),(0,-1),(3,2)\}$ un conjunto de datos y $f(x) = 2\alpha e^{\beta x} + \gamma x^2$, donde α, β y γ son los parámetros que se pretenden ajustar a través del algoritmo de Gauss-Newton. Sea $\hat{Q}_k$ la formulación del problema de mínimos cuadrados lineal que se resuelve en el k-ésimo paso de iteración del problema de mínimos cuadrados no lineal a través de Gauss-Newton para A y f.

$$\hat{Q}_k = \min \|Q_k\|_2^2$$

Calcule Q_k, que es la función objetivo del problema de mínimos cuadrados lineal que comprende el algoritmo de Gauss-Newton (puede dejar la expresión como producto de vectores y/o matrices, sin necesidad de simplificar los productos), indicando explícitamente la dependencia de Q_k con $\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}$ y γ_{k+1}.

$Q_k =$

c) Calcule α_1, β_1 y γ_1, tomando como valores iniciales $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ y $\gamma_0 = -1$ (escriba los resultados con tres decimales).

α_0	α_1
1	

β_0	β_1
1	

γ_0	γ_1
-1	