Universidad de la República - Facultad de Ingeniería

Examen de Métodos Numéricos
7 de febrero de 2022
Duración: 3 horas
El repartido consta de 11 carillas impresas.

Nombre completo:
Cédula:

Observaciones:	- Las hojas del repartido entregado deben mantenerse engrapadas durante toda la evaluación. - Todas las respuestas deben estar contenidas en el repartido entregado; no se aceptarán hojas adicionales. - Solamente se tomarán en cuenta las resoluciones de los problemas que se encuentren debajo de su correspondiente enunciado. - Solamente está permitido el uso de calculadoras estándar. - No está permitido el uso de material adicional. - La evaluación está basada en un esquema de 100 puntos, donde el puntaje mínimo para la aprobación es de 60.

Problema 1 (40 pt.)

a) Pruebe que la norma operador (o norma inducida) es compatible.
Ver teórico (p 37).

b) Considere la matriz A de tamaño $n \times n$. Pruebe que $\|A\|$ (norma operador de A) está acotada inferiormente por su radio espectral.

Ver teórico (p 38).

c) Considere el sistema $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$, donde $\mathbb{A}_{n\times n}$ es una matriz no singular y $\mathbb{X}^*$ la solución del sistema.

Para estimar $\mathbb{X}^*$ se propone la iteración

$$\mathbb{X}^{(k+1)} = \mathbb{Q}\mathbb{X}^{(k)} + \mathbb{C},\ k > 0 \tag{1}$$

Con $\mathbb{X}^{(0)}, \mathbb{C} \in \mathbb{R}^n$.

Demuestre que si $|\rho(\mathbb{Q})| < 1$ la sucesión $\{\mathbb{X}^k\}$ generada por (1) converge a $\mathbb{X}^*$.
Ver teórico (p 46).

d) Demuestre que el método de Jacobi es un caso particular de (1).
Ver teórico (p 45).

e) Considere el sistema

$$\begin{aligned} 5x + 2y - z &= 6 \\ x + 6y - 3z &= 4 \\ 2x + y + 4z &= 7 \end{aligned} \tag{2}$$

Usando Jacobi y con $\mathbb{X}^{(0)} = (0,0,0)$, calcule $\mathbb{X}^{(k)},\ k = 1,2,3$ (trabaje con tres decimales).

La iteración de Jacobi está dada por

$$x^{[k+1]} = \frac{1}{5}(6 - 2y^{[k]} + z^{[k]}) \tag{3}$$
$$y^{[k+1]} = \frac{1}{6}(4 - x^{[k]} + 3z^{[k]}) \tag{4}$$
$$z^{[k+1]} = \frac{1}{4}(7 - 2x^{[k]} - y^{[k]}) \tag{5}$$

Tomando $x^{[0]} = y^{[0]} = z^{[0]} = 0$, obtenemos

$$x^{[1]} = \frac{1}{5}[6 - (2 \times 0) + 0] = 1.200 \tag{6}$$
$$y^{[1]} = \frac{1}{6}[4 - 0 + (3 \times 0)] = 0.667 \tag{7}$$
$$z^{[1]} = \frac{1}{4}[7 - (2 \times 0) - 0] = 1.750 \tag{8}$$

Que son las componentes de $\mathbb{X}^{(1)}$. Iterando nuevamente obtenemos

$$x^{[2]} = \frac{1}{5}[6 - (2 \times 0.667) + 1.750] = 1.2832 \tag{9}$$
$$y^{[2]} = \frac{1}{6}[4 - 1.200 + (3 \times 1.750)] = 1.341667 \tag{10}$$
$$z^{[2]} = \frac{1}{4}[7 - (2 \times 1.200) - 0.667] = 0.98325 \tag{11}$$

Que son las componentes de $\mathbb{X}^{(2)}$. Por último, iterando nuevamente obtenemos

$$x^{[3]} = \frac{1}{5}[6 - (2 \times 1.342) + 0.98325] = 0.859983 \tag{12}$$
$$y^{[3]} = \frac{1}{6}[4 - 1.283 + (3 \times 0.98325)] = 0.944425 \tag{13}$$
$$z^{[3]} = \frac{1}{4}[7 - (2 \times 1.2832) - 1.341667] = 0.772983 \tag{14}$$

Que son las componentes de $\mathbb{X}^{(3)}$.

$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$
0	1.200	1.283	0.860
0	0.667	1.342	0.944
0	1.750	0.983	0.773

Problema 2 (30 pt.)

a) Deduzca la región de estabilidad para el método del trapecio (esto es, el par predictor-corrector con Euler hacia adelante como predictor y trapecio como corrector).
Ver teórico (p 131).

b) Dado el problema de valores iniciales

$$y' = \frac{-y^2}{1+x};\ y(0) = 1 \tag{15}$$

Tomando $h = 0.05$ calcule $y_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ (trabaje con tres decimales) con un paso de Euler como predictor y dos pasos de trapecio como corrector.

Tenemos que

$$y_{i+1}^{[k+1]} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{[i]})] \tag{16}$$

Necesitamos un valor de arranque $y_{i+1}^{[0]}$, el cual obtenemos mediante Euler:

$$y_{i+1}^{[0]} = y_i + hf(x_i, y_i) \tag{17}$$

Para calcular y_{i+1} a partir de y_i primero calculamos $y_{i+1}^{[0]}$ usando (17) (paso de Euler) y luego iteramos (16) usando $y_{i+1}^{[0]}$ (primera corrección).
Esto nos da $y_{i+1}^{[1]}$, con el cual volvemos a iterar (16) para obtener $y_{i+1}^{[2]}$ (segunda corrección).
Recordemos que $x_0 = 0, x_1 = 0.05, x_2 = 0.1, x_3 = 0.15, x_4 = 0.2$. Como $h = 0.05$, tenemos que (17) queda

$$y_{i+1}^{[0]} = y_i - \frac{0.05y_i^2}{1 + x_i} \tag{18}$$

Mientras que (16) se convierte en

$$y_{i+1}^{[k+1]} = y_i + 0.025 \left[\frac{y_i^2}{1 + x_i} + \frac{(y_{i+1}^{[k]})^2}{1 + x_{i+1}} \right] \tag{19}$$

El predictor para y_1 es $y_1^{[0]} = y_0 - \frac{0.05y_0^2}{1+x_0} = 1 - \frac{0.05(1)^2}{1+0} = 0.95$
Si aplicamos dos correcciones tenemos

$$y_1^{[1]} = y_0 - 0.025 \left[\frac{y_0^2}{1 + x_0} + \frac{(y_1^{[0]})^2}{1 + x_1} \right] = \tag{20}$$

$$= 1 - 0.025 \left[\frac{(1)^2}{1 + 0} + \frac{(0.95)^2}{1 + 0.05} \right] = 0.95351 \tag{21}$$

$$y_1^{[2]} = y_0 - 0.025 \left[\frac{(y_0)^2}{1 + x_0} + \frac{(y_1^{[1]})^2}{1 + x_1} \right] = \tag{22}$$

$$= 1 - 0.025 \left[\frac{(1)^2}{1 + 0} + \frac{(0.95351)^2}{1 + 0.05} \right] = 0.95335 = y_1 \tag{23}$$

Por tanto $y_1 = 0.95335$.
Ahora el predictor para $y_2^{[0]}$, que es
$y_2^{[0]} = y_1 - 0.05\frac{y_1^2}{1+x_1} = 0.95335 - 0.05\frac{(0.95335)^2}{1.05} = 0.91007.$
Si aplicamos dos correcciones tenemos

$$y_2^{[1]} = y_1 - 0.025 \left[\frac{(y_1)^2}{1 + x_1} + \frac{(y_2^{[0]})^2}{1 + x_2} \right] = \tag{24}$$

$$= 0.95335 - 0.025 \left[\frac{(0.95335)^2}{1.05} + \frac{(0.91007)^2}{1.10} \right] = 0.91288 \tag{25}$$

$$y_2^{[2]} = y_1 - 0.025 \left[\frac{(y_1)^2}{1 + x_1} + \frac{(y_2^{[1]})^2}{1 + x_2} \right] = \tag{26}$$

$$= 0.95335 - 0.025 \left[\frac{(0.95335)^2}{1.05} + \frac{(0.91288)^2}{1.10} \right] = 0.91277 = y_2 \tag{27}$$

Ahora el predictor para $y_3^{[0]}$, que es
$y_3^{[0]} = y_2 - 0.05\frac{y_2^2}{1+x_2} = 0.91277 - 0.05\frac{(0.91277)^2}{1.10} = 0.87489.$

Si aplicamos dos correcciones tenemos

$$y_3^{[1]} = y_2 - 0.025\left[\frac{(y_2)^2}{1+x_2} + \frac{(y_3^{[0]})^2}{1+x_3}\right] = \tag{28}$$

$$= 0.91277 - 0.025\left[\frac{(0.91277)^2}{1.10} + \frac{(0.87489)^2}{1.15}\right] = 0.87719 \tag{29}$$

$$y_3^{[2]} = y_2 - 0.025\left[\frac{(y_2)^2}{1+x_2} + \frac{(y_3^{[1]})^2}{1+x_3}\right] = \tag{30}$$

$$= 0.91277 - 0.025\left[\frac{(0.91277)^2}{1.10} + \frac{(0.87719)^2}{1.15}\right] = 0.87710 = y_3 \tag{31}$$

Por último, el predictor para $y_4^{[0]}$, que es
$y_4^{[0]} = y_3 - 0.05\frac{y_3^2}{1+x_3} = 0.87710 - 0.05\frac{(0.87710)^2}{1.15} = 0.843652.$
Si aplicamos dos correcciones tenemos

$$y_4^{[1]} = y_3 - 0.025\left[\frac{(y_3)^2}{1+x_3} + \frac{(y_4^{[0]})^2}{1+x_4}\right] = \tag{32}$$

$$= 0.87710 - 0.025\left[\frac{(0.87710)^2}{1.15} + \frac{(0.84365)^2}{1.20}\right] = 0.84554 \tag{33}$$

$$y_4^{[2]} = y_3 - 0.025\left[\frac{(y_3)^2}{1+x_3} + \frac{(y_4^{[1]})^2}{1+x_4}\right] = \tag{34}$$

$$= 0.87710 - 0.025\left[\frac{(0.87710)^2}{1.15} + \frac{(0.84554)^2}{1.20}\right] = 0.84548 = y_4 \tag{35}$$

Tenemos entonces los valores y_1, y_2, y_3, y_4, que luego de redondear a 3 decimales quedan:

y_1	y_2	y_3	y_4
0.953	0.913	0.877	0.845

c) Considere un problema dinámico representado por la siguiente expresión.

$$\ddot{x}(t) = f(\dot{x}(t), x(t), t) \tag{36}$$

con condiciones iniciales dadas por $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, donde x y f son funciones escalares. Se dispone de dos métodos numéricos explícitos de resolución: M_a y M_b, de orden a y b (con $b > a$), respectivamente. M_a proporciona las aproximaciones $x_k^{(a)}$, y M_b las aproximaciones $x_k^{(b)}$. Se considera el siguiente error: $z_k = x_k^{(b)} - x_k^{(a)}$.

i) Si se tiene la siguiente evolución de z_k, determine (marcando con una cruz) qué método de resolución utilizaría para aproximar la solución real en tiempos mayores a $t = 1200$. Justifique.

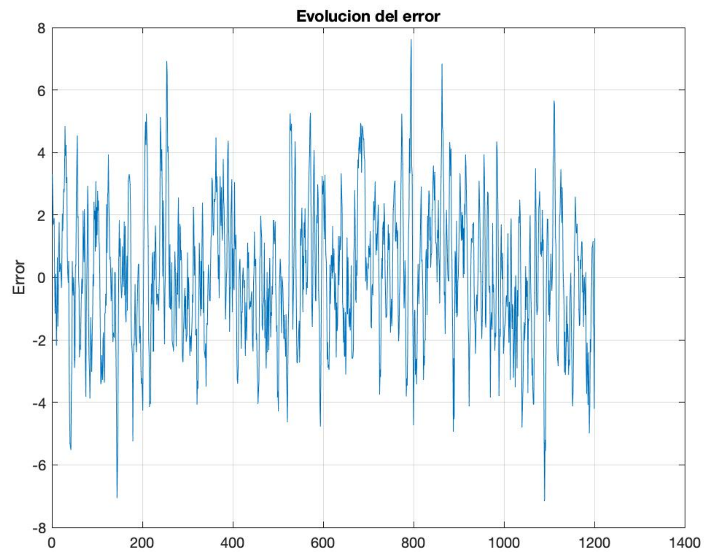

Figure 1: Evolución de z_k.

A partir de la Figura puede presumirse que el error z_k se mantendrá acotado para tiempos mayores a $t = 1200$, permaneciendo en los mismos valores en que se obtuvo durante el período de prueba $t = [0, 1200]$. En consecuencia, debido a que M_b es un método de mayor orden que M_a, y por ende de mayor costo computacional, se opta por trabajar con M_a para tiempos mayores a $t = 1200$.

M_a	M_b

ii) Si en cambio la evolución de z_k es la que se muestra a continuación, determine (marcando con una cruz) qué método de resolución utilizaría para aproximar la solución real en tiempos mayores a $t = 1200$. Justifique.

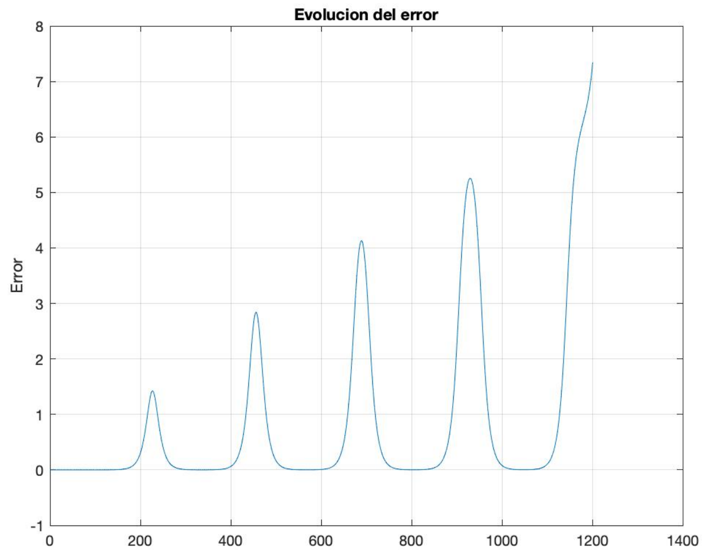

Figure 2: Evolución de z_k.

En este caso, parece evidente que para tiempos superiores a $t = 1200$ se obtendrán valores del error z_k mayores a los que se obtuvieron en el período de prueba $t = [0, 1200]$. Si bien el método M_b conlleva mayor costo computacional, es razonable trabajar con él dado que de otra forma se obtendrán soluciones $x_k^{(a)}$ cuya diferencia con la solución exacta presumiblemente aumentará a medida que avance el tiempo.

M_a	M_b

Problema 3 (30 pt.)

a) Plantee en qué consiste el problema de interpolación de forma $\mathcal{C}^2$ mediante splines cúbicos (esto es, dados los puntos $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ cuántos splines s_i se necesitan y qué condiciones deben cumplir).

Ver teórico (p 108).

b) Denotamos $d_i := s_i'(i)$ para $i = 0, \ldots, n-1$ y $d_n := s_{n-1}'(n)$. Estos d_i son valores desconocidos (a priori), pero los usamos en la siguiente fórmula:

$$s_i(x) = y_i + (x-i)(y_{i+1}-y_i) + (x-i)(x-(i+1))(y_{i+1}-y_i-d_i) + (x-i)^2(x-(i+1))(d_i+d_{i+1}-2(y_{i+1}-y_i))$$

Justifique la validez de la fórmula dada para $s_i(x)$, teniendo en cuenta los valores que deben tomar $s_i(i)$, $s_i(i+1)$, $s_i'(i)$ y $s_i'(i+1)$.

Realizando la simplificación $x_i = i$ y haciendo cuentas, se observa que.

1. $s_i(i) = y_i$

2. $s_i(i+1) = y_{i+1}$

3. $s_i'(i) = d_i$

4. $s_i'(i+1) = d_{i+1}$

c) Deduzca el sistema de ecuaciones lineales que vincula los d_i.

Se deduce de la continuidad de la derivada segunda ($s''_i(i+1) = s''_{i+1}(i+1)$). Reduciendo queda:

$$2d_i + 8d_{i+1} + 2d_{i+2} = 6(y_{i+2} - y_i)$$

d) Dados los puntos $\{(0,0),(1,1),(2,0)\}$, halle los dos polinomios $s_0(x)$ y $s_1(x)$ que los interpolan usando el método de splines cúbicos, imponiendo $d_0 = d_2 = 0$.

$$\boxed{s_0(x) = x \; + \; x(x-1) \; - \; 2x^2(x-1)}$$

$$\boxed{s_1(x) = 1 \; - \; (x-1) \; - \; (x-1)(x-2) \; + \; 2(x-1)^2(x-2)}$$

e) Con los polinomios hallados en la parte anterior, calcule $s_0\left(\frac{1}{4}\right)$ y $s_1\left(\frac{4}{5}\right)$ (trabaje con tres decimales).

$$\boxed{s_0\left(\tfrac{1}{4}\right) = 0.156}$$

$$\boxed{s_1\left(\tfrac{4}{5}\right) = 0.864}$$