Universidad de la República - Facultad de Ingeniería

Examen de Métodos Numéricos
7 de febrero de 2022
Duración: 3 horas
El repartido consta de 11 carillas impresas.

Nombre completo:
Cédula:

Observaciones:	- Las hojas del repartido entregado deben mantenerse engrapadas durante toda la evaluación. - Todas las respuestas deben estar contenidas en el repartido entregado; no se aceptarán hojas adicionales. - Solamente se tomarán en cuenta las resoluciones de los problemas que se encuentren debajo de su correspondiente enunciado. - Solamente está permitido el uso de calculadoras estándar. - No está permitido el uso de material adicional. - La evaluación está basada en un esquema de 100 puntos, donde el puntaje mínimo para la aprobación es de 60.

Problema 1 (40 pt.)

a) Pruebe que la norma operador (o norma inducida) es compatible.

b) Considere la matriz A de tamaño $n \times n$. Pruebe que $\|A\|$ (norma operador de A) está acotada inferiormente por su radio espectral.

c) Considere el sistema $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$, donde $\mathbb{A}_{n\times n}$ es una matriz no singular y $\mathbb{X}^*$ la solución del sistema.

Para estimar $\mathbb{X}^*$ se propone la iteración

$$\mathbb{X}^{(k+1)} = \mathbb{Q}\mathbb{X}^{(k)} + \mathbb{C},\ k > 0 \tag{1}$$

Con $\mathbb{X}^{(0)}, \mathbb{C} \in \mathbb{R}^n$.

Demuestre que si $|\rho(\mathbb{Q})| < 1$ la sucesión $\{\mathbb{X}^k\}$ generada por (1) converge a $\mathbb{X}^*$.

d) Demuestre que el método de Jacobi es un caso particular de (1).

e) Considere el sistema

$$\begin{aligned} 5x+2y-z &= 6 \\ x+6y-3z &= 4 \\ 2x+y+4z &= 7 \end{aligned} \tag{2}$$

Usando Jacobi y con $\mathbb{X}^{(0)}=(0,0,0)$, calcule $\mathbb{X}^{(k)},\ k=1,2,3$ (trabaje con tres decimales).

$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$
0			
0			
0			

Problema 2 (30 pt.)

a) Deduzca la región de estabilidad para el método del trapecio (esto es, el par predictor-corrector con Euler hacia adelante como predictor y trapecio como corrector).

b) Dado el problema de valores iniciales

$$y' = \frac{-y^2}{1+x}; \; y(0) = 1 \tag{3}$$

Tomando $h = 0.05$ calcule $y_i, \; i = 1, 2, 3, 4$ (trabaje con tres decimales) con un paso de Euler como predictor y dos pasos de trapecio como corrector.

y_1	y_2	y_3	y_4

c) Considere un problema dinámico representado por la siguiente expresión.

$$\ddot{x}(t) = f(\dot{x}(t), x(t), t) \tag{4}$$

con condiciones iniciales dadas por $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, donde x y f son funciones escalares. Se dispone de dos métodos numéricos explícitos de resolución: M_a y M_b, de orden a y b (con $b > a$), respectivamente. M_a proporciona las aproximaciones $x_k^{(a)}$, y M_b las aproximaciones $x_k^{(b)}$. Se considera el siguiente error: $z_k = x_k^{(b)} - x_k^{(a)}$.

i) Si se tiene la siguiente evolución de z_k, determine (marcando con una cruz) qué método de resolución utilizaría para aproximar la solución real en tiempos mayores a $t = 1200$. Justifique.

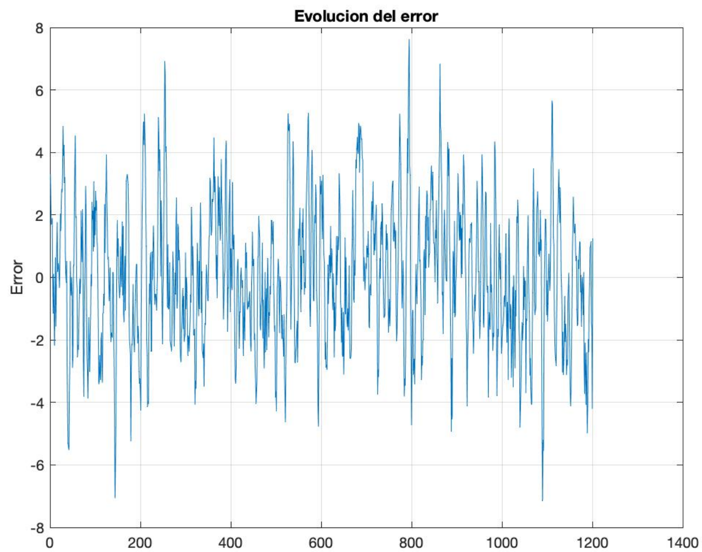

Figure 1: Evolución de z_k.

M_a	M_b

ii) Si en cambio la evolución de z_k es la que se muestra a continuación, determine (marcando con una cruz) qué método de resolución utilizaría para aproximar la solución real en tiempos mayores a $t = 1200$. Justifique.

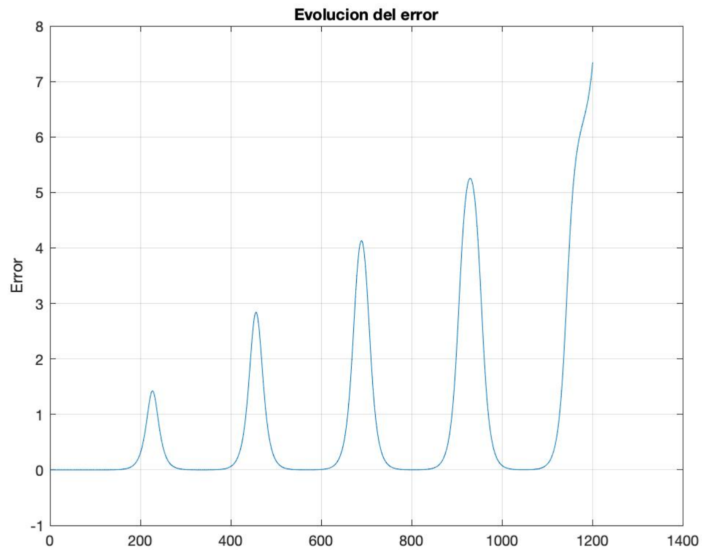

Figure 2: Evolución de z_k.

M_a	M_b

Problema 3 (30 pt.)

a) Plantee en qué consiste el problema de interpolación de forma $\mathcal{C}^2$ mediante splines cúbicos (esto es, dados los puntos $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ cuántos splines s_i se necesitan y qué condiciones deben cumplir).

b) Denotamos $d_i := s_i'(i)$ para $i = 0, \ldots, n-1$ y $d_n := s_{n-1}'(n)$. Estos d_i son valores desconocidos (a priori), pero los usamos en la siguiente fórmula:

$$s_i(x) = y_i + (x-i)(y_{i+1}-y_i) + (x-i)(x-(i+1))(y_{i+1}-y_i-d_i) + (x-i)^2(x-(i+1))(d_i+d_{i+1}-2(y_{i+1}-y_i))$$

Justifique la validez de la fórmula dada para $s_i(x)$, teniendo en cuenta los valores que deben tomar $s_i(i)$, $s_i(i+1)$, $s_i'(i)$ y $s_i'(i+1)$.

c) Deduzca el sistema de ecuaciones lineales que vincula los d_i.

d) Dados los puntos $\{(0,0),(1,1),(2,0)\}$, halle los dos polinomios $s_0(x)$ y $s_1(x)$ que los interpolan usando el método de splines cúbicos, imponiendo $d_0 = d_2 = 0$.

$s_0(x)$=

$s_1(x)$=

e) Con los polinomios hallados en la parte anterior, calcule $s_0\left(\frac{1}{4}\right)$ y $s_1\left(\frac{4}{5}\right)$ (trabaje con tres decimales).

$s_0\left(\frac{1}{4}\right)$=

$s_1\left(\frac{4}{5}\right)$=