Universidad de la República - Facultad de Ingeniería

Examen de Métodos Numéricos
17 de diciembre de 2021
Duración: 3 horas
El repartido consta de 9 carillas impresas.

Nombre completo:
Cédula:

Observaciones:	- Las hojas del repartido entregado deben mantenerse engrapadas durante toda la evaluación. - Todas las respuestas deben estar contenidas en el repartido entregado; no se aceptarán hojas adicionales. - Solamente se tomarán en cuenta las resoluciones de los problemas que se encuentren debajo de su correspondiente enunciado. - Solamente está permitido el uso de calculadoras estándar. - No está permitido el uso de material adicional. - La evaluación está basada en un esquema de 100 puntos, donde el puntaje mínimo para la aprobación es de 60.

Problema 1 (40 pt.)

Se desea resolver $f(x) = 0$, con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para ello se reescribe esta ecuación como $x = g(x)$ (esto es, $f(x^*) = 0$ sii $x^* = g(x^*)$, o sea si x^* es un *Punto Fijo* de g) y se genera la sucesión

$$x_{n+1} = g(x_n) \tag{1}$$

partiendo de x_0 en un entorno I de x^*.

a) Demuestre que si g es contractiva, p veces derivable y la derivada p-ésima es la priemra que no se anula en el punto fijo x^*, entonces la iteración 1 converge a x^* con orden de convergencia p y velocidad de convergencia $\frac{|g^{(p)}(x^*)|}{p!}$.

b) Demuestre que si g es derivable en I, $x^* \in I$ punto fijo de g y además $|g'(x)| \leq m < 1$ en I, entonces $\{x_n\}$ converge a x^* y además $x_{n+1} - x^* \approx g'(x^*)(x_n - x^*)$.

c) Considere la siguiente ecuación.

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \tag{2}$$

Tres formas posibles de reescritura son

c.1) $x = \sqrt{2x+8}$

c.2) $x = \dfrac{x^2-8}{2}$

c.3) $x = \dfrac{2x+8}{x}$

Se quiere obtener la raíz de (2) con mayor valor absoluto. ¿Cuál (o cuáles) reescrituras generan una sucesión convergente? Justifique.

d) Indique cuál de las tres sucesiones anteriores (en caso de convergencia) la sucesión $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ decrece más rápido (marcar con una cruz); donde e_n es la sucesión de errores.

c.1
c.2
c.3

e) Para la sucesión seleccionada en la parte anterior, y tomando $x_0 = 5$, calcule x_i (con $i = 1, 2, \ldots, 5$). Complete los valores correspondientes en la siguiente tabla, trabajando con tres decimales en cada caso.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

Problema 2 (30 pt.)

Se considera el modelo lineal $y(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i \phi_i(t)$, donde ϕ_i son funciones dadas linealmente independientes y a_i son los parámetros del modelo. Se tienen además n datos experimentales $\{(t_k, y_k), k = 1, \ldots, n\}$, con $m << n$.

a) Escriba la matriz A y los vectores x y b del problema de mínimos cuadrados lineal (PMCL) asociado.

b) Demuestre que el conjunto de soluciones del PMCL ($\min_x Ax = b$) coincide con las soluciones de las *Ecuaciones Normales*.

c) Se tienen los 4 datos experimentales $\{(-1, \frac{7}{2}), (0, \frac{3}{2}), (1, \frac{3}{2}), (2, \frac{11}{2})\}$ y el modelo $y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Resuelva el PMCL y escriba A, b, a_0, a_1, a_2 (trabaje con 3 decimales).

Problema 3 (30 pt.)

a) Plantee el problema de interpolación y deduzca el método de interpolación de Newton.

b) Escriba el polinomio interpolante $q(x)$ por los puntos $\{(-1,0),(1,0),(2,0),(3,1)\}$ utilizando el método de Lagrange.

$q(x) =$

c) Escriba el polinomio $p(x)$ que además interpola el punto $(4,4)$ utilizando el método de Newton.

$p(x) =$