Universidad de la República - Facultad de Ingeniería

Examen de Métodos Numéricos
12 de julio de 2022
Duración: 3 horas
El repartido consta de 8 carillas impresas.

Nombre completo:
Cédula:
Número de lista:

Observaciones:	- Las hojas del repartido entregado deben mantenerse engrapadas durante toda la evaluación. - Todas las respuestas deben estar contenidas en el repartido entregado; no se aceptarán hojas adicionales. - Solamente se tomarán en cuenta las resoluciones de los problemas que se encuentren debajo de su correspondiente enunciado. - Solamente está permitido el uso de calculadoras estándar. - No está permitido el uso de material adicional. - La evaluación está basada en un esquema de 100 puntos, donde el puntaje mínimo para la aprobación es de 60.

Problema 1 (40 pt.)

a) Explique el método de Newton-Raphson para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, incluyendo el pseudocódigo del algoritmo resultante.

Se desea resolver el sistema $\left\{ \begin{array}{cl} \log|x| - xy & = 0 \\ z^2 y - x^2 & = 2 \\ zxy - x^2 - y^2 - z^2 & = 1 \end{array} \right.$ partiendo de $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Siguiendo el método de la parte a), calcule $X^{(1)}$ y $X^{(2)}$ (escriba los resultados con tres decimales).

$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$
2		
2		
1		

c) Calcule $X^{(1)}$ y $X^{(2)}$ utilizando la variante de Newton-Raphson amortiguado con un coeficiente de amortiguamiento igual a $\frac{1}{2}$ (escriba los resultados con tres decimales).

$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$
2		
2		
1		

d) Explique en qué consiste la variante del método de Newton modificado. Calcule $X^{(1)}$ y $X^{(2)}$ utilizando la variante de Newton modificado con un coeficiente $p = 3$ (escriba los resultados con tres decimales).

$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$
2		
2		
1		

Problema 2 (30 pt.)

Se quiere aplicar la descomposición en valores singulares (SVD) a un problema de mínimos cuadrados lineal (PMCL).

a) Sea $b \in \mathbb{R}^m$ y $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ de rango r. Sea $U\Sigma V^t$ la descomposición SVD de A. Demuestre que la solución al PMCL de norma mínima es el vector dado por $\hat{X} = V \begin{pmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^t b$, donde $\Sigma_r = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r) \in \mathcal{M}_{r\times r}(\mathbb{R})$, donde se verifica que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ son los valores singulares de A. Explicite por qué los valores singulares verifican $\sigma_i > 0, \forall i = 1, \ldots, r$.

b) Se tiene la siguiente tabla de datos.

x	z
0	3.2
2	10.2
4	11.4

Se quiere aproximar los datos anteriores al modelo $z(x) = ax^2 + b\sqrt{x}$. Calcule los valores de a y b del PMCL mediante el método de descomposición SVD (escriba los resultados con tres decimales). Justifique sus resultados. ¿Se verifican las condiciones de la parte anterior sobre los valores singulares?

a	b

Problema 3 (30 pt.)

Para el Problema de Valores Iniciales $\begin{cases} y'(x) & = f(x, y(x)) \\ y(0) & = y_0 \end{cases}$

a) Deduzca el método de Euler hacia atrás.

b) Deduzca su orden de consistencia.

c) Encuentre su región de estabilidad.

d) Usando el método de Euler hacia adelante como predictor y un paso de Euler hacia atrás como corrector (use $h = 0.1$), deduzca la expresión de dicho par y úsela para calcular y_1, y_2, y_3 para el P.V.I. (escriba los resultados con tres decimales). $\begin{cases} y'(x) &= x + y^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$

y_0	y_1	y_2	y_3
1			