Resolución Examen - Métodos Numéricos

Viernes 27 de Julio de 2020

Problema 1 (35 puntos)

a) El teorema del punto fijo asegura que si X es un espacio métrico completo y $g : X \to X$ es una contracción, el MIG dado por $x_{n+1} = g(x_n)$ con cualquier punto inicial x_0 es convergente. Aún más, el punto límite es punto fijo de g, y tal punto fijo de g es único.

b) Puesto que $\rho(Q) < 1$, por el teorema del radio espectral existe una norma inducida $||\cdot||_\epsilon$ tal que $||Q||_\epsilon < 1$. Gracias a la submultiplicatividad de toda norma inducida tenemos que: $||g(x) - g(y)|| = ||Q(x - y)|| \leq ||Q||_\epsilon ||x - y||$, por lo que g es una contracción de factor $m = ||Q||_\epsilon < 1$.

c) Observando que el espacio euclideo $\mathbb{R}^n$ es métrico completo y g es contracción, aplica el teorema del punto fijo. Tenemos entonces que la sucesión $x^{k+1} = g(x^k)$ es convergente al vector α que verifica que $Q\alpha + r = \alpha$, y ésta es la única solución del sistema lineal $x = Qx + r$.

Problema 2 (35 puntos)

a) Sea f de clase C^{n+1} en el intervalo $[x_0, x_n]$ y p_n el polinomio interpolante a f por las abscisas $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Para cada $x \in [x_0, x_n]$ existe $\gamma_x \in [x_0, x_n]$ tal que cumple la siguiente igualdad para el error $E(x)$:

$$E(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(\gamma_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Demostración:

Tenemos $x \in [x_0, x_n]$ fijo. Si $x = x_i$, para algún i, la igualdad es evidente pues $E(x_i) = 0$. Supongamos entonces que x no coincide con ninguna de las abscisas. Consideremos la función auxiliar $F : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ tal que:

$$F(t) = f(t) - p_n(t) - (f(x) - p_n(x)) \frac{\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} \tag{1}$$

Se observa que $F(x_i) = 0$ para cada $i = 0, \ldots, n$, y además $F(x) = 0$, por lo que F tiene al menos $n+2$ raíces en $[x_0, x_n]$. Como f es de clase C^{n+1}, resulta que F también es de clase C^{n+1}. Sean $p_0 < p_1 < \ldots < p_{n+1}$ las $n+2$ raíces de F. Aplicando el teorema de Rolle en cada intervalo podemos asegurar que existen $n+1$ raíces $p'_0 < \ldots < p'_n$ para F'. Aplicando reiteradas veces el teorema de Rolle es posible asegurar la existencia de una raíz $\gamma_x \in [x_0, x_n]$ de la función $F^{(n+1)}$.

Como p_n es un polinomio de grado n o menos, tenemos que su derivada de orden $n+1$ es nula. Entonces, al derivar $n+1$ veces la función F tenemos que:

$$F^{(n+1)}(\gamma_x) = f^{(n+1)}(\gamma_x) - (n+1)! \frac{f(x) - p_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} = 0$$

Finalmente despejando $f(x) - p_n(x)$ se prueba el enunciado.

b) El método de Lagrange considera la base de polinomios $\{l_i(x)\}_{i=0,\ldots,n}$ tal que $l_i(x_j) = \delta_{i,j}$, que vale 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$. Una expresión para los miembros de tal base se consigue por descomposición factorial:

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)} \tag{2}$$

Luego, el polinomio interpolante, que sabemos que es único, admite la siguiente expresión:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

Para hallar el polinomio interpolante de Lagrange de $f(x) = sen(\pi x)$ por las abscisas $x_i = \frac{i}{n}$, $i \in \{0, \dots, n\}$, simplemente sustituimos en la expresión 2, y usamos que $sen(0) = sen(\pi) = 0$:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{i=1}^{n-1} sen\left(\frac{i\pi}{n}\right) \frac{\prod_{j\neq i}(x - \frac{j}{n})}{\prod_{j\neq i}(\frac{i}{n} - \frac{j}{n})} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} sen\left(\frac{i\pi}{n}\right) \frac{\prod_{j\neq i}(nx - j)}{\prod_{j\neq i}(i - j)} \end{aligned}$$

c) Observamos que si $|f^{(n+1)}(x)| \leq \pi^{n+1}$, mientras que si x_i, $x \in [0, 1]$ tenemos que $|x - x_i| \leq 1$. Reemplazando en la expresión 1 tenemos que $E_n \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$. Entonces el error decae uniformemente a cero cuando la cantidad de puntos de interpolación tiende a infinito.

Problema 3 (30 puntos)

a) Dada la EDO $y'(t) = f(t, y)$ con dato inicial $y(t_0) = y_0$. Mediante integración en el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$ tenemos la siguiente igualdad:

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$$

El método de Euler hacia adelante se obtiene de estimar la integral mediante un rectángulo con altura y_n. Nótese que se conoce y_0:

$$y_{n+1} - y_n = hf(t_n, y_n)$$

b) El problema test es la siguiente EDO:

$$\begin{cases} y' &= qy \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

siendo q un número complejo arbitrario. Al aplicar Euler hacia adelante al problema test tenemos que:

$$y_{n+1} = y_n + h(qy_n) = (1 + hq)y_n = (1 + z)y_n$$

Por inducción completa obtenemos que $y_n = (1 + z)^n y_0 = (1 + z)^n$. Esta sucesión permanece acotada si y solamente si $|1 + z| \leq 1$. En términos gráficos, el complejo $z = hq$ debe permanecer dentro del disco unidad centrado en el complejo $-1 + 0i$.

c) La iteración correspondiente a la EDO con $f(x, y) = x^2y^2 + log(y)$ es:

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n^2 y_n^2 + log(y_n))$$

Partiendo de $y_0 = 1$ y paso $h = \frac{1}{10}$ tenemos $y_1 = 1$, $y_2 = 1,001$ y $y_3 \approx 1,005$.