Examen - Métodos Numéricos

Lunes 27 de Julio de 2020

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (35 puntos)

a) Enuncie el Teorema del Punto Fijo en espacios métricos completos.

b) Dados $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $r \in \mathbb{R}^n$ fijos, demuestre que si $\rho(Q) < 1$ entonces el operador $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido como $g(x) = Qx + r$ es una contracción.

c) Aplicando las partes anteriores muestre que todo MIG de la forma $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ (con g como en la parte anterior) es convergente $\forall\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Problema 2 (35 puntos)

a) Enuncie y demuestre el Teorema de acotación del error en la interpolación polinómica.

b) Exprese el polinomio interpolante de la función $f(x) = sen(\pi x)$ ($x \in [0, 1]$) por las n+1 abcisas $\{0, 1/n, 2/n, \ldots, 1\}$ usando la base de Lagrange.

c) Muestre que a medida que n crece el error de interpolación decrece a cero en todo $[0, 1]$

Problema 3 (30 puntos)

Dada una EDO $y' = f(x, y)$ con condición inicial $y(x_0) = y_0$:

a) Describa y deduzca el método de Euler.

b) Deduzca la región de estabilidad de dicho método.

c) Plantee el método de Euler para la ecuación de la parte a) cuando $f(x, y) = x^2y^2 + \log(y)$, $y(0) = 1$ y $x \in [0, 1]$. Halle y_3 con paso $h = \frac{1}{10}$