Resolución Examen - Métodos Numéricos

Viernes 28 de febrero de 2020

Problema 1 (35 puntos)

i) Ver teórico.
ii) Ver teórico.
iii) Tenemos: $y'(x) = y(x)e^{xy(x)}$.

Calculamos el *Predictor*: $y_{k+1}^0 = y_k + hf(x_k, y_k)$.

Calculamos el *Corrector*: $y_{k+1}^{n+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^n)]$.

Tenemos entonces: $\begin{cases} y_{k+1}^{n+1} = y_k + \frac{h}{2}(y_k e^{x_k y_k} + y_{k+1}^n e^{x_{k+1}^n y_{k+1}^n}) \\ y_{k+1}^0 = y_k + hy_k e^{x_k y_k} \end{cases}$

iv) Región de estabilidad del método: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n))$

Al aplicar el método iterativo al problema test tenemos: $y_{n+1} = y_n + hq(y_n + \frac{h}{2}qy_n)$.
Haciendo cuentas tenemos:
$y_{n+1} = y_n + hqy_n + \frac{(hq)^2}{2}y_n$
$y_{n+1} = (1 + hq)y_n + \frac{(hq)^2}{2}y_n$
$y_{n+1} = (1 + hq + \frac{(hq)^2}{2})y_n$

Tomando $z \in \mathbb{C} : z = hq$ tenemos:
$y_{n+1} = (1 + z + \frac{z^2}{2})y_n$

Por inducción completa se obtiene que :
$y_{n+1} = (1 + z + \frac{z^2}{2})^n y_0 = (1 + z + \frac{z^2}{2})^n$. Esta sucesión permanece acotada si y solamente si $|1 + z + \frac{z^2}{2}| \leq 1$.

v) $y'(x) = y(x)2x$, $y(0) = 1$. Aplicamos el método anterior con paso $\frac{h}{2}$ para estimar $y(\frac{1}{2})$.
$y_0 = 1$
$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}f(x_0 + \frac{\frac{1}{2}}{2}, y_0 + \frac{\frac{1}{2}}{2}f(x_0, y_0))$
$y_1 = 1 + \frac{1}{2}f(\frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}f(0, 1))$
$y_1 = 1 + \frac{1}{2}f(\frac{1}{4}, 1)$
$y_1 = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}$
$y_1 = 1 + \frac{1}{4}$

$y_1 = y(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$

Problema 2 (35 puntos)

i) Dado el conjunto de datos $D = \{(-1, 0), (2, 1/2), (1, 2), (2, 1)\}$ y la función de ajuste $y(t) = \alpha t^2 + 2\beta e^t + \gamma$. Tenemos $y_1(t) = t^2$, $y_2(t) = 2e^t$, $y_3(t) = 1$. La matriz A y el vector b son los siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} y_1(-1) & y_2(-1) & y_3(-1) \\ y_1(0) & y_2(0) & y_3(0) \\ y_1(1) & y_2(1) & y_3(1) \\ y_1(2) & y_2(2) & y_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{e} & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2e & 1 \\ 4 & 2e^2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii) El sistema de ecuaciones normales es $A^tAx = A^tb$, con $x = (\alpha, \beta, \gamma)^t$. Como las columnas de A son *l.i.*, $|A^tA| \neq 0$. En consecuencia, existe una única solución.

iii) Ver teórico.

iv) Si $R(\alpha, \beta)$ es la función residuo, el PMCL del paso k es:

$$\min_{\delta} ||J_R(\alpha_k, \beta_k)\delta + R(\alpha_k, \beta_k)||_2 = \min_{\delta} ||A\delta - b||_2$$

Entonces $A = J_R(\alpha_k, \beta_k)$ y $b = -R(\alpha_k, \beta_k)$ y valen:

$$A = \mathbb{J}_{(\alpha_k, \beta_k)} = \begin{pmatrix} sin(\alpha_k) & 1 \\ 0 & 0 \\ sin(\alpha_k) & 1 \\ 2sin(2\alpha_k) & 4 \end{pmatrix}, b = -R(\alpha_k, \beta_k) = \begin{pmatrix} 0 \\ -cos(\alpha_k/2) \\ 1 - cos(2\alpha_k) - 4\beta_k \\ 2 - cos(\alpha_k) + \beta_k \end{pmatrix}$$

Problema 3 (30 puntos)

i) Ver teórico.

ii) Al sumar tendremos que $Q^t + Q = 0$ con lo cual $2q_{ii} = 0$, $\forall i \in 1..n$, entonces: $q_{ii} = 0$, $\forall i \in 1..n$ (los términos de la diagonal son cero en una matriz antisimétrica).
Aplicando el Teorema de Gershgorin (a matrices antisimétricas) los valores propios de Q están en discos $\{D_i\}_{i \in 1..n}$ del plano complejo centrados en $(0,0)$ y radios $r_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |q_{ij}|$, $\forall i \in 1..n$. Por hipótesis sabemos que $\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |q_{ij}| < 1$, $\forall i \in 1..n$, entonces claramente los discos D_i están incluidos estrictamente dentro del círculo de radio 1 del plano complejo con centro $(0,0)$. Con lo cual $\rho(Q) < 1$ y por lo tanto el método es convergente en este caso.

iii) Haremos la demostración por inducción en k.
Paso Base: $k = 1$.
Tenemos que: $x_1 = Qx_0 + r = Qx_0 + 0Qr + r$.
Paso Inductivo:
H.I.) Se asume que $x_h = Qx_0 + (h-1)Qr + r$.
T.I.) Queremos probar que $x_{h+1} = Qx_0 + (h)Qr + r$.

$x_{h+1} = Qx_h + r = Q(Qx_0 + (h-1)Qr + r) + r = Q^2x_0 + hQ^2r - Q^2r + Qr + r$
Como Q es idempotente ($Q^2 = Q$) tenemos:
$Qx_0 + hQr - Qr + Qr + r = Qx_0 + hQr + r$, como se quería.
Por lo tanto $x_{k+1} = Qx_0 + kQr + r$. Vemos que no hay convergencia, basta con pasar al límite con $k \to +\infty$, siempre que $Qr \neq 0$.

iv) a) Sabemos que $e^{(0)} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i$ y además que el error en el k-ésimo paso satisface $e^{(k)} = Q^k e^{(0)}$. Con lo cual:
$e^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} Q^k \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^k \alpha_i v_i$
de la misma manera tenemos que:

$e^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^{k+1} \alpha_i v_i$

b)

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{||e^{(k+1)}||}{||e^{(k)}||} = \lim_{k\to+\infty} \frac{||\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i)^{k+1}\alpha_i v_i||}{||\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i)^{k}\alpha_i v_i||} = \lim_{k\to+\infty} \frac{||(\lambda_1)^{k+1}\alpha_1 v_1 + (\lambda_1)^{k+1}\sum_{i=2}^{n}\frac{(\lambda_i)^{k+1}}{(\lambda_1)^{k+1}}\alpha_i v_i||}{||(\lambda_1)^{k}\alpha_1 v_1 + (\lambda_1)^{k}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\lambda_i)^{k}}{(\lambda_1)^{k}}\alpha_i v_i||} =$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{||(\lambda_1)^{k+1}\alpha_1 v_1||}{||(\lambda_1)^{k}\alpha_1 v_1||} = |\lambda_1|$$