Examen - Métodos Numéricos

Viernes 28 de Febrero de 2020

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (35 puntos)

i) Describa el Método del Trapecio para la resolución de una EDO: $y'(x) = f(x, y(x))$.

ii) Explique cómo implementar el método mediante una iteración de punto fijo cuando f es no lineal.

iii) Se quiere aplicar el método del Trapecio a la EDO: $y'(x) = y(x)e^{xy(x)}$. Plantee la iteración de punto fijo que se obtiene en cada paso de la implementación.

iv) Calcule la región de estabilidad del siguiente Método (no se pide dibujar):

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right).$$

v) Se considera la EDO: $y'(x) = y(x)2x$, $y(0) = 1$. Aplique el método anterior, con paso $h = \frac{1}{2}$, para estimar $y(\frac{1}{2})$.

Problema 2 (35 puntos)

i) Sea $y(t) = \alpha t^2 + 2\beta e^t + \gamma$. Halle la matriz A y el vector b del Problema de Mínimos Cuadrados Lineal (PMCL) asociado a este modelo. Los datos son:

$$\{(t_i, y_i), i = 1, \dots, 4\} = \{(-1, 0), (0, 1/2), (1, 2), (2, 1)\}.$$

ii) Plantee las Ecuaciones Normales del PMCL anterior. ¿Tienen solución única?

iii) Describa el Método de Gauss-Newton (GN) para la resolución de un Problema de Mínimos Cuadrados No Lineal.

iv) Sea $y(t) = \cos(\alpha t) + \beta t^2$. Se quiere utilizar GN para hallar los parámetros que mejor ajustan a los datos de la parte (i). Halle la matriz A y el vector b del PMCL que se obtiene en cada paso del método de GN.

Problema 3 (30 puntos)

Se quiere estimar $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tal que: $\alpha = Q\alpha + r$; con $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $r \in \mathbb{R}^n$. Para esto se considera la iteración: $x^{k+1} = Qx^k + r$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Se define el error: $e^k = x^k - \alpha$.

i) Pruebe que el método converge si y sólo si $\rho(Q) < 1$.

ii) Pruebe que si Q es antisimétrica ($Q^t = -Q$) y $\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |q_{ij}| < 1$, $\forall\, i = 1, \dots, n$, entonces el método converge.

iii) Demostrar que si Q es idempotente ($Q^2 = Q$) vale: $x_{k+1} = Qx_0 + kQr + r$. ¿Qué se puede decir de la convergencia en este caso?

iv) Sean $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ los valores propios de Q (genérica), que supondremos reales, y $\{v_1, \dots, v_n\}$ vectores propios asociados. Sea $e^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, para ciertos $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

a) Pruebe que: $e^{k+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^{k+1} v_i$.

b) Si además: $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| \geq 0$, pruebe que:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\|e^{(k+1)}\|}{\|e^{(k)}\|} = |\lambda_1|.$$