Resolución Examen - Métodos Numéricos

Lunes 10 de febrero de 2020

1 a) Ver teórico.

b) Tenemos $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$,
$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = \pi$,
$y_0 = f(0) = 1,\ y_1 = f(\frac{\pi}{2}) = 1,\ y_2 = f(\pi) = -1$.
El polinomio interpolante es

$$P(x) = \sum_{j=0}^{2} y_j l_j(x) \tag{1}$$

Donde $l_j(x) = \dfrac{\prod_{i=0,i\neq j}^{2}(x - x_i)}{\prod_{i=0,i\neq j}^{2}(x_j - x_i)}$.
Operando, tenemos

$$l_0(x) = \frac{(x-\pi/2)(x-\pi)}{(0-\pi/2)(0-\pi)} = \frac{(x-\pi/2)(x-\pi)}{\pi^2/2} \tag{2}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-0)(x-\pi)}{(\pi/2-0)(\pi/2-\pi)} = \frac{(x)(x-\pi)}{-\pi^2/4} \tag{3}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-\pi/2)}{(\pi-0)(\pi-\pi/2)} = \frac{(x)(x-\pi/2)}{\pi^2/2} \tag{4}$$

Por tanto $P(x) = l_0(x) + l_1(x) - l_2(x)$.
Operando y agrupando en potencias de x obtenemos $P(x) = \frac{-4x^2+2\pi x+\pi^2}{\pi^2}$

c) Ver teórico

d) Ver teórico

2) a) Ver teórico.

b) Ver teórico.

c) Ver teórico.

d) La iteración del método de Newton-Raphson puede escribirse como

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \tag{5}$$

En términos de Iteración de Punto Fijo el planteo anterior puede escribirse como:

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \tag{6}$$

Donde $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Puede probarse (ver teórico) que si existe una constante m tal que $|g'| \leq m < 1$ en $I = [1/e, 1]$, entonces g es contractiva y por tanto existe un único punto fijo $\alpha \in I$ tal que $g(\alpha) = \alpha$, o sea $f(\alpha) = 0$.
Operando, tenemos

$$g'(x) = \frac{-(x + \log(x))}{(x+1)^2} \tag{7}$$

de donde $|g'(x)| = \dfrac{x + \log(x)}{(x+1)^2}$.
Esto es lo mismo que $g'(x) = \dfrac{-f(x)}{(x+1)^2}$. Como $g'(\alpha) = 0$ y g' es continua, esto significa

que existe un entorno de α contenido en I donde $|g'| < 1$ y por tanto (ver teórico) la iteración de punto fijo converge.
Otra forma de verlo: Una fracción crece cuando el denominador es pequeño y/o cuando el numerador es grande.
Sustituyendo el mayor valor posible para el numerador (en x=1) y el menor valor posible para el denominador (x=1/e), tenemos $0 < |g'(x)| \leq \dfrac{1}{(1+1/e)^2} < 1$. Tomando $m = \dfrac{1}{(1+1/e)^2}$ tenemos que g es contractiva en I por lo que N-R converge $\forall x^{(0)} \in I$.
Respecto del orden y velocidad de convergencia, operando obtenemos

$$g''(x) = -\frac{f'(x)}{(x+1)^2} + \frac{2f(x)}{(x+1)^3} \tag{8}$$

de donde

$$g''(\alpha) = \frac{-f'(\alpha)}{(\alpha+1)^2} = \frac{-1}{\alpha(\alpha+1)^2} \tag{9}$$

Como $g'(\alpha) = 0$ y $g''(\alpha) \neq 0$, tenemos (ver teórico) que el orden de convergencia es 2 y la velocidad de convergencia es $\frac{|g''(\alpha)|}{2} = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)^2}$.

3) a) Ver teórico.
   b) Ver teórico.
   c) i) Para G-S tenemos

$$x^{(k+1)} = Qx^{(k)} + r \tag{10}$$

donde la matriz Q y el vector r quedan $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$, $r = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$
La matriz Q tiene valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1/2$, de donde su radio espectral $\rho(Q) = 1/2$ cumple $\rho(Q) < 1$, por lo que la iteración converge en virtud de las partes anteriores.

ii) La solución exacta es $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Partiendo de $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenemos $x^{(1)} = Qx^{(0)} + r$, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.
Iterando nuevamente, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$
Operando, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$.
Sabemos que el error en el paso k, $e^{(k)}$ cumple $e^{(k)} = Q^k e^{(0)}$, de donde $e^{(2)} = Q^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Operando, tenemos $e^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$
Esto coincide con el hecho que $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$, de donde es obvio que $e^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$, una forma directa y más sencilla de calcularlo.