Examen - Métodos Numéricos

Lunes 10 de febrero de 2020

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (30 puntos)

a) Describa el método de interpolación de Lagrange por $n+1$ puntos: $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$.

b) Se considera la función $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$. Utilice Lagrange para hallar el polinomio que interpola a f por los puntos con abscisas: $x_i = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.

c) Pruebe que $\forall\, x \in [x_0, x_n]$, el error de interpolación está dado por:

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\ ,\ \theta_x \in [x_0, x_n],\ f \in C^{n+1}.$$

d) Describa el fenómeno de Runge y de un ejemplo de una función donde se manifieste.

Problema 2 (35 puntos)

a) Defina orden y velocidad de convergencia de una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Pruebe el teorema de orden y velocidad de convergencia del MIG asociado a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

c) Describa el Método de Newton-Raphson (NR) para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

d) Se considera $f(x) = x + \log(x)$, la cual tiene una raíz α en el intervalo $[\frac{1}{e}, 1]$.

Analice convergencia, orden y velocidad de convergencia de NR para estimar α.

Problema 3 (35 puntos)

a) Dadas $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $r \in \mathbb{R}^n$ tales que: $\alpha = Q\alpha + r$, se considera el método iterativo:

$$\text{(IE)} \qquad \begin{cases} x^{k+1} = Qx^k + r \\ x^0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Pruebe que x^k converge a α para toda condición inicial x^0 si y sólo si $\rho(Q) < 1$.

b) Demuestre que el método de Gauss-Seidel (GS) es un caso particular de (IE).

c) Se considera un sistema lineal con: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

i) Analice la convergencia de GS a la solución α del sistema.

ii) Partiendo de $x^0 = (0, 0)$, halle la estimación x^2 de GS y el correspondiente error.