

# Examen - Métodos Numéricos

Martes 17 de Diciembre de 2019

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

## Problema 1 (30 puntos)

Considere el Problema de Mínimos Cuadrados Lineal (PMCL):  $\min_x \|b - Ax\|_2$ , con  $A \in R^{m \times n}$ ,  $b \in R^m$ ,  $x \in R^n$  y  $m > n$ .

- Deduzca el Sistema de Ecuaciones Normales asociado al PMCL.
- ¿Cómo resolvería  $p$  Ecuaciones Normales asociadas a  $p$  PMCL diferentes, asumiendo que  $A$  no cambia?. Calcule el número de operaciones respectivo.
- ¿Qué es la descomposición QR de una matriz  $A \in R^{m \times n}$ ?
  - Explique cómo se utiliza la descomposición QR para resolver un PMCL.

## Problema 2 (35 puntos)

- Describa el Método de Newton-Raphson (NR) para estimar la raíz de una ecuación vectorial:  $f(X) = \vec{0}$ , con  $f : R^n \rightarrow R^n$ .
- Partiendo de  $X_0 = (0, 0)$  calcule  $X_2$  aplicando NR a la función:

$$f(x, y) = (x^2 + 2y - 2, x - 2y + 2).$$

- Se considera la función:

$$g(x, y) = (x^2 + 2y + x - 2, x - y + 2).$$

- Verifique que  $f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow g(x, y) = (x, y)$ .
  - Partiendo de  $X_0 = (0, 0)$  calcule  $X_2$  aplicando el MIG con la función  $g$ .
- Sea  $X_{sol}$  la solución exacta de  $f(x, y) = (0, 0)$  que no tiene coordenadas negativas. Halle  $X_{sol}$  y compare  $\|X_{sol} - X_2\|_2^2$  para los valores de  $X_2$  calculados en (b) y (c).

## Problema 3 (35 puntos)

- Describa el Método de Euler “hacia atrás” (EAt) para la resolución de una EDO:

$$y'(x) = f(x, y).$$

- Explique su implementación mediante “Predictor-Corrector”.
- Halle la región de estabilidad de EAt (sin Predictor-Corrector).
- Plantee una implementación alternativa de EAt basada en Newton-Raphson.  
*Sugerencia: considere  $F(y) = y_n + hf(x_n, y)$ .*
- Se considera la EDO asociada a  $f(x, y) = x^2y - 2y$ . Sea  $y_{n+1}$  la estimación obtenida al aplicar EAt. Expresé  $y_{n+1}$  en términos de  $y_n$ ,  $x_{n+1}$  y  $h$ .

**Fundamentar detalladamente cada respuesta.**