

# Examen - Métodos Numéricos

Julio de 2019

Número de examen	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

## Problema 1 - Sistemas Lineales (35 puntos)

Se considera un sistema de ecuaciones lineal  $Ax = b$ , donde  $A$  es una matriz cuadrada invertible, y  $A$  no posee elementos nulos en su diagonal.

a) Mostrar que el método de Jacobi se puede expresar en la forma  $x^{(k+1)} = Qx^{(k)} + r$ .

Expresar  $Q$  y  $r$  en función de  $A$  y  $b$ .

b) Probar que el vector de errores verifica:  $e^{(k+1)} = Q^{k+1}e^{(0)}, \forall k \geq 0$ .

Se considera ahora el sistema lineal  $Ax = b$ , con  $b = (0, 1, 1)^t$  y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para este sistema, cuya solución es  $\alpha = (0, -1, -1)^t$ :

c) Determinar  $Q$  y  $r$  de Jacobi.

d) Encontrar un vector inicial  $x^{(0)}$  tal que la sucesión de Jacobi no converja a  $\alpha$ .

*Sugerencia: trabajar con las potencias pares de  $Q$ :  $Q^2, Q^4, \dots$ .*

e) Expresar la matriz  $Q(w)$  del método de Jacobi relajado en función de  $w$ .

¿Existe  $w > 0$  tal que la relajación sea convergente para todo  $x^{(0)}$ ? Justificar.

## Problema 2 - Ecuaciones Diferenciales (30 puntos)

Se considera la siguiente ecuación diferencial:  $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$ , con datos iniciales  $y(0) = 2, y'(0) = 1$ , cuya solución exacta es  $y(t) = (2 - t)e^t$ .

a) Formular la ecuación diferencial anterior como un Problema de Valores Iniciales.

b) Aplicar dos pasos de Euler hacia adelante con paso  $h = 1$ , para estimar  $y(2)$ .

c) Estimar  $y(2)$  con un método alternativo, indicando ventajas y desventajas.

## Problema 3 - Interpolación (35 puntos)

a) Probar que el polinomio interpolante existe y es único.

b) Enunciar y demostrar el Teorema del Error en Interpolación Polinómica.

c) Probar o dar contraejemplo: si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, el polinomio interpolante equiespaciado  $p_n$  converge uniformemente a  $f$  cuando  $n$  tiende a infinito.