# Examen - Métodos Numéricos

Viernes 22 de febrero de 2019

| Número de examen | APELLIDO, Nombre | Cédula de identidad |
|---|---|---|
| | | |

## Problema 1 (35 puntos)

(a) Sea $\hat{X} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A^t\left(y - A\hat{X}\right) = 0$. Para todo $w \in \mathbb{R}^n$ vemos que $Y - Aw = \left(Y - A\hat{X}\right) + \left(A\left(\hat{X} - w\right)\right)$, entonces para todo $w \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\|Y - Aw\|_2^2 &= \left\|\left(Y - A\hat{X}\right) + \left(A\left(\hat{X} - w\right)\right)\right\|_2^2 \\
&= \left\|Y - A\hat{X}\right\|_2^2 + \left\|A\left(\hat{X} - w\right)\right\|_2^2 + 2\left(A\left(\hat{X} - w\right)\right)^t\left(Y - A\hat{X}\right) \\
&= \left\|Y - A\hat{X}\right\|_2^2 + \underbrace{\left\|A\left(\hat{X} - w\right)\right\|_2^2}_{\geq 0} + 2\left(\hat{X} - w\right)^t \underbrace{A^t\left(Y - A\hat{X}\right)}_{=0} \\
&\geq \left\|Y - A\hat{X}\right\|_2^2
\end{aligned}$$

y entonces $\hat{X}$ minimiza $\|Y - AX\|_2^2$.

Supongamos por absurdo que $\hat{X} \in \mathbb{R}^n$ minimiza $\|Y - AX\|_2^2$ y $A^t\left(Y - A\hat{X}\right) = Z \neq 0$. Dado $\varepsilon > 0$ definimos $w = \hat{X} + \varepsilon Z$, por lo visto anteriormente en la demostración sabemos que

$$\begin{aligned}
\|Y - Aw\|_2^2 &= \left\|Y - A\hat{X}\right\|_2^2 + \varepsilon^2\|AZ\|_2^2 - 2\varepsilon Z^t \underbrace{A^t\left(Y - A\hat{X}\right)}_{=Z} \\
&= \left\|Y - A\hat{X}\right\|_2^2 + \varepsilon^2\|AZ\|_2^2 - 2\varepsilon\|Z\|_2^2
\end{aligned}$$

y para llegar a una contradicción con respecto a la minimalidad, buscamos un $\varepsilon$ tal que $\|Y - Aw\|_2^2 < \left\|Y - A\hat{X}\right\|_2^2$. Tenemos dos casos, $\|AZ\|_2^2 = 0$ o $\|AZ\|_2^2 \neq 0$.

Si $\|AZ\|_2^2 = 0$, tomo cualquier $\varepsilon > 0$ y funciona. Si $\|AZ\|_2^2 \neq 0$, tomo $\varepsilon = \frac{\|Z\|_2^2}{\|AZ\|_2^2}$ y

$$\begin{aligned}
\|Y - Aw\|_2^2 &= \left\|Y - A\hat{X}\right\|_2^2 + \frac{\|Z\|_2^4}{\|AZ\|_2^2} - 2\frac{\|Z\|_2^4}{\|AZ\|_2^2} \\
&= \left\|Y - A\hat{X}\right\|_2^2 - \frac{\|Z\|_2^4}{\|AZ\|_2^2} \\
&> \left\|Y - A\hat{X}\right\|_2^2
\end{aligned}$$

(b) Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ de rango $r$. Entonces existen $U \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ y $V \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ambas ortogonales y $\Sigma \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ diagonal con $rango(\Sigma) = r$ tal que $A = U\Sigma V^t$.

La matriz $\Sigma$ es de la forma: $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_r & 0^{r\times(n-r)} \\ \hline 0^{(m-r)\times r} & 0^{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right]$

donde $\Sigma_r = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ matriz diagonal que cumple $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$.
A los $\{\sigma_i\}_{i\in 1\ldots r}$ se les denomina *valores singulares* de $A$.
Además, $U = [U_1|U_2]$ con $U_1 \in \mathcal{M}_{m\times r}(R)$, $V = [V_1|V_2]$ con $V_1 \in \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{R})$, y cumplen $A = U_1\Sigma_r V_1^T$.

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $T(x) = Ax$, entonces $A = {}_{\mathcal{C}_m}((T))_{\mathcal{C}_n}$ donde $\mathcal{C}_i$ es la base canónica de $\mathbb{R}^i$. Por otra parte, se tiene que existen $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente tales que $T(v_i) = \sigma_i w_i$ con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ y $\sigma_i = 0$ si $i > r$.

Por lo tanto, ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sigma_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$ Además

$$ {}_{\mathcal{C}_m}((T))_{\mathcal{C}_n} = {}_{\mathcal{C}_m}((Id))_{\mathcal{B}\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}\mathcal{A}}((Id))_{\mathcal{C}_n} $$

Las matrices de cambio de base ${}_{\mathcal{C}_m}((Id))_{\mathcal{B}}$ y ${}_{\mathcal{A}}((Id))_{\mathcal{C}_n}$ son ortogonales pues transforman una base ortonormal en otra. Por lo tanto, poniendo

$$ U = {}_{\mathcal{C}_m}((Id))_{\mathcal{B}}, \qquad V = {}_{\mathcal{C}_n}((Id))_{\mathcal{A}}, \qquad \Sigma = {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} $$

se tiene que $A = U\Sigma V^t$ y además $rango(\Sigma) = r$.

Los valores singulares de $A$ son $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ donde $\lambda_i$ es valor propio de $A^TA$. Se cumple además que $\lambda_i \geq 0$ ya que $A^TA$ es semidefinida positiva.

(c) La solución al PMCL de norma mínima es el vector dado por

$$ \hat{X} = V \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^t b $$

Consideramos

$$ \|b - AX\|_2 = \|U^t(b - AVV^tX)\|_2 = \|(\underbrace{U^tb}_{C} - \underbrace{U^tAV}_{\Sigma}\underbrace{V^tX}_{Z})\|_2 $$

donde la primera igualdad es cierta por ser $U^t$ ortogonal y $VV^t = Id$.
Luego, realizando los cambios de variables $Z = V^tX$ y $C = U^tb$ se tiene:

$$ \|b - AX\|_2 = \|C - \Sigma Z\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} c1 - \Sigma_r z_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\|_2 $$

donde $z_1 \in \mathbb{R}^r$, $z_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$, $c_1 \in \mathbb{R}^r$, y $c_2 \in \mathbb{R}^{m-r}$.

Esta norma se hace mínima cuando $c_1 = \Sigma_r z_1$ ($z_2$ arbitrario).
Tomando $z_2 = \vec{0} \in \mathbb{R}^{m-n}$, tendremos que $\|Z\|_2$ es mínima.
La norma $\|X\|_2$ tambin es mínima puesto que $\|X\|_2 = \|VZ\|_2 = \|Z\|_2$, ya que $V$ es ortogonal.

Llamando $\hat{Z}$ a la solución de norma mínima, se tiene que

$$ \hat{X} = V\hat{Z} = V \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = V \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^t b \Rightarrow \hat{X} = V \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^t b $$

## **Problema 2** (35 puntos)

(a) Teorema de acotación del error en Interpolación Polinómica.

Sea $f$ de clase $C^{n+1}$ en el intervalo $[x_0, x_n]$ y $p_n$ el polinomio interpolante a $f$ por las abscisas $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Luego, para cada $x \in [x_0, x_n]$ existe $\gamma_x \in [x_0, x_n]$ tal que se cumple la siguiente igualdad para el error $E(x)$:

$$E(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(\gamma_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Demostración.

Tomemos $x \in [x_0, x_n]$ fijo. Si $x = x_i$ para algún $i$, la igualdad es evidente, pues $E(x_i) = 0$. Supongamos entonces que $x$ no coincide con ninguna de las abscisas. Consideremos la función auxiliar $F : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(t) = f(t) - p_n(t) - (f(x) - p_n(x)) \frac{\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}.$$

Se menciona, ya que puede resultar confuso, que la función $F$ depende de la variable $t$, no de $x$, que pensamos fijo. Se observa que $F(x_i) = 0$ para cada $i = 0, \ldots, n$, y además $F(x) = 0$, por lo que $F$ tiene al menos $n + 2$ raíces en $[x_0, x_n]$. Como $f$ es de clase $C^{n+1}$, resulta que $F$ también es de clase $C^{n+1}$. Sean $p_0 < p_1 \ldots < p_{n+1}$ las $n + 2$ raíces de $F$. Aplicando el Teorema de Rolle en cada intervalo podemos asegurar que existen $n + 1$ raíces $p'_0 < \ldots < p'_n$ para $F'$ (nuevamente recalcamos que la derivada es respecto a $t$). Aplicando reiteradas veces el teorema de Rolle es posible asegurar la existencia de una raíz $\gamma_x \in [x_0, x_n]$ de la función $F^{(n+1)}$. Como $p_n$ es un polinomio de grado $n$ o menos, tenemos que su derivada de orden $n+1$ es nula. Entonces, al derivar $n+1$ veces la función $F$ tenemos que:

$$F^{(n+1)}(\gamma_x) = f^{(n+1)}(\gamma_x) - (n+1)! \frac{f(x) - p_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} = 0.$$

Finalmente despejando $f(x) - p_n(x)$ se prueba el enunciado.

(b) Dados $n + 1$ puntos a interpolar: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, el método de Newton consiste en encontrar los $a_i$ que satisfacen:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i w_i(x)$$

siendo

$$w_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ \prod_{0 \le j < i}(x - x_j) & \text{si } i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

A partir de esta base se plantea y resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{array}{ll} (x_0, y_0): & a_0 = y_0 \\ (x_1, y_1): & a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1 \\ (x_2, y_2): & a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \\ & \vdots \\ (x_n, y_n): & a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=0}^{j=i-1}(x_i - x_j) = y_n \end{array}$$

(c) El sistema queda:

$$\begin{array}{ll} (0,1): & a_0 = 1 \\ (1,1): & a_0 + a_1(1-0) = 1 \Rightarrow a_1 = 0 \\ (2,2): & a_0 + a_1(2-0) + a_2(2-0)(2-1) = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \\ (3,3): & a_0 + a_1(3-0) + a_2(3-0)(3-1) + a_3(3-0)(3-1)(3-2) = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{-1}{6} \end{array}$$

Entonces:

$$p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x(x-1)$$

$$p_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x(x-1) - \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

(d) Basta aplicar el Teorema de acotación del error en Interpolación Polinómica, cada $(x - x_i)$ se puede acotar por 2, y sabemos que todas las derivadas de $f$ en un compacto están acotadas.

## **Problema 3** (30 puntos)

(a) Sea el $(PVI)$: $\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Cuando en el mtodo del trapecio la predicción se realiza con Euler y no se realizan iteraciones de punto fijo, el procedimiento recibe el nombre de mtodo de Heun:

$$(Heun): \begin{cases} y_{k+1}^H = y_k^H + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k^H) + f(x_{k+1}, y_k^H + hf(x_k, y_k^H))] \\ y_0^H = y_0 \end{cases}$$

(b) La región de estabilidad del mtodo de Heun se deduce:

$$y_{k+1}^H = y_k^H + \frac{h}{2}[qy_k^H + f(x_{k+1}, y_k^H + hqy_k^H)]$$

$$y_{k+1}^H = y_k^H + \frac{h}{2}[qy_k^H + q(y_k^H + hqy_k^H)]$$

$$y_{k+1}^H = y_k^H + \frac{hqy_k^H}{2} + \frac{h}{2}q(y_k^H + hqy_k^H)$$

$$y_{k+1}^H = y_k^H[1 + \frac{hq}{2} + \frac{h}{2}q(1 + hq)]$$

$$y_{k+1}^H = y_k^H[1 + hq + \frac{(hq)^2}{2}]$$

Por lo que para que $y_{k+1}^H$ se mantenga acotada se llega a:

$$\mathcal{R} = \{hq \in \mathbb{C} : |1 + hq + \frac{(hq)^2}{2}| < 1\}$$

(c) Imponemos que $hq = z = a + 0i \in \mathbb{R}$, y además en el borde se dará la igualdad:

$$|1 + a + \frac{a^2}{2}| = 1$$

Buscamos $1 + a + \frac{a^2}{2} = 1$, que ocurre cuando $a = 0$ o cuando $a = -2$; y tambin $1 + a + \frac{a^2}{2} = -1$, que ocurre cuando $a = -1 + \sqrt{3}$ o cuando $a = -1 - \sqrt{3}$.