Solución Examen - Métodos Numéricos

Lunes 4 de febrero de 2019

Problema 1 (35 puntos)

a,b,c) Ver teórico.

d) En el caso concreto resulta que $det(Q_J - \lambda I) = \lambda^2 + 4$, por lo que $\rho(Q_J) = 2$, y Jacobi no converge. Puesto que $Q_{JOR} = wQ + (1-w)I$, los nuevos valores propios resultan $(1-w) \times 1 \pm w \times 2i$. Imponiendo que el cuadrado de su magnitud no supere la unidad encontramos el conjunto de valores para w con sobrerrelajación convergente:

$$(1-w)^2 + 4w^2 = 5w^2 - 2w + 1 < 1, \tag{1}$$

por lo que w debe respetar la desigualdad $w(5w-2) < 0$, o equivalentemente, cualquier sobrerrelajación con $w \in (0, 2/5)$ asegura convergencia.

Problema 2 (35 puntos)

a,b) Ver teórico.

c) La consistencia implica $a = 1$, mientras que anulando la primera derivada se deduce que $b = -1$. Se obtiene el método de Newton-Raphson.

Problema 3 (35 puntos)

a) Es el Problema Test con $q = 2$. Su solución es $y(x) = e^{2x}$.

b) $y_i^E = (1+hq)^i = (1+\frac{2}{N})^i$, mientras que $y_i^T = \frac{(1+hq/2)^i}{(1-hq/2)^i} = \frac{(1+1/N)^i}{(1-1/N)^i}$.

c) $\lim_N y_N^E = \lim_N (1+\frac{2}{N})^N = e^2 = y(1)$, y $\lim_N y_N^T = e^1/e^{-1} = e^2 = y(1)$.
Con mayor análisis se prueba que Euler hacia adelante es consistente con orden 1, mientras que Trapecio lo es con orden 2.