Solución Examen - Métodos Numéricos

Viernes 27 de julio de 2018

Problema 1 (35 puntos)

a) El Teorema del Punto Fijo asegura que si X es un espacio métrico completo y $g : X \to X$ es una contracción, el MIG dado por $x_{n+1} = g(x_n)$ con cualquier punto inicial x_0 es convergente. Más aún, el punto límite es punto fijo de g, y tal punto fijo de g es único.

b) Puesto que $\rho(Q) < 1$, por el Teorema del Radio Espectral existe una norma inducida $\| \cdot \|_\epsilon$ tal que $\|Q\|_\epsilon < 1$. Gracias a la submultiplicatividad de toda norma inducida tenemos que: $\|g(x) - g(y)\| = \|Q(x - y)\| \leq \|Q\|_\epsilon \|x - y\|$, por lo que g es una contracción de factor $m = \|Q\|_\epsilon < 1$.

c) Observando que el espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$ es métrico completo y g es contracción, aplica el Teorema del Punto Fijo. Tenemos entonces que la sucesión $x^{k+1} = g(x^k)$ es convergente al vector α que verifica $Q\alpha + r = \alpha$, y esta es única solución del sistema lineal $x = Qx + r$.

Problema 2 (35 puntos)

a) El polinomio interpolante de Lagrange se obtiene mediante la expresión:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x),$$

donde $l_i(x_j) = \delta_{(i,j)}$. Concretamente, los miembros de la base de Lagrange son:

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}.$$

b) Es simple comprobar que $p_n(x)$ es polinomio interpolante, y que su grado es inferior o igual a n. Sea $p(x)$ polinomio interpolante de grado no mayor que n y $o(x) = p(x) - p_n(x)$. Se ve que $o(x_i) = p(x_i) - p_n(x_i) = 0$, por lo que $o(x)$ tiene $n + 1$ raíces, y grado no mayor que n. La única posibilidad es que o sea el polinomio nulo, y $p(x) = p_n(x)$ es el único polinomio interpolante.

c) Ver teórico.

d) No es cierto que la interpolación equiespaciada converge uniformemente para la función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$. De hecho, ocurre el fenómeno de Runge, donde la sucesión $\{p_n(x)\}$ es divergente. En este caso se recomienda utilizar la interpolación de Chebyshev, que sí es convergente a f.

Problema 3 (35 puntos)

a) Ver teórico.
b) Ver teórico.
c) El problema homogéneo tiene como solución a $y_H(t) = ce^{3t}$, mientras que buscando una expresión lineal como particular se consigue $y_P(t) = (3t+1)/9$. La solución general es entonces $y(t) = ce^{3t} + (3t+1)/9$, y como $y(0) = c + 1/9 = 0$ se consigue que $c = -1/9$. La solución resulta $y(t) = 1/9(3t + 1 - e^{3t})$.
d) El valor correcto es $y(1) = \frac{4-e^3}{9} \simeq -\frac{16}{9}$. Al aplicar el método de Euler hacia adelante se obtiene: $y_1^E = 0$, $y_2^E = -\frac{1}{4}$.
e) El método de Euler es consistente de orden 1. Por lo tanto, el estimador proveniente de la extrapolación de Richardson es $y^* = 2y_4^E - y_2^E$, siendo y_4^E el estimador de Euler hacia Adelante con nuevo paso $h = 1/4$. Efectuando la iteración se consigue $y_4^E = -153/256$, por lo que $y^* = -306/256 + 64/256 = -121/128$. El error cometido es aproximadamente 1/2. Si bien los errores son inaceptables, se aprecia la reducción de extrapolación, y la mejora de estimación al reducir el paso.