Examen - Métodos Numéricos

Martes 18 de diciembre de 2018

Número de examen	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (30 puntos)

a) Enunciar el Teorema del Punto Fijo en espacios métricos completos.
b) Sean $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $r \in \mathbb{R}^n$ matriz y vector fijos. Mostrar que si $\rho(Q) < 1$, entonces el operador $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definido como $g(x) = Qx + r$, es una contracción.
c) Aplicando las partes anteriores, mostrar que todo MIG de la forma $x^{k+1} = g(x^k)$, con g y Q como en la parte anterior, es convergente; independientemente de x^0.

Problema 2 (35 puntos)

a) Definir el polinomio interpolante de Lagrange.
b) Demostrar que el polinomio interpolante (de menor grado) existe y es único.
c) Enunciar y demostrar el Teorema del Error en Interpolación polinómica.
d) Se considera la función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$. ¿Es cierto que la interpolación equiespaciada de f en $[-1, 1]$ converge uniformemente a f?

Problema 3 (35 puntos)

a) Definir Problema de Valores Iniciales (PVI).
b) Deducir el método de Euler hacia adelante.
c) Resolver de forma exacta el PVI $y'(t) = 3y(t) - t$ con dato inicial $y(0) = 0$.
d) Sea $y^E(h)$ la estimación de Euler hacia adelante del valor $y(1)$, con paso $h = 1/2$. Calcular $y^E(h)$ y mejorar la estimación usando Extrapolación de Richardson.