Solución Examen - Métodos Numéricos

Viernes 27 de julio de 2018

Problema 1 (35 puntos)

a) Ver teórico.
b) Ver teórico.
c) El método de Newton Raphson resulta: $x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} = \frac{x_n}{2}$.
Se verifica que $g'(0) = \frac{1}{2} \neq 0$, por lo que el orden es lineal ($p = 1$) y la velocidad es $\beta = \frac{1}{2}$.
d) El error absoluto cometido por NR en el paso n es: $E_n = |x_n - 0| = \frac{1}{2^n} = 2^{-n}$.
Se busca entonces el primer natural que verifica $2^{-n} \leq 10^{-3}$; el cual resulta ser $n = 10$.

Problema 2 (35 puntos)

a) Un Problema de Valores Iniciales o PVI consiste en resolver una ecuación diferencial de la forma $y'(t) = f(t, y(t))$ con dato inicial $y(t_0) = y_0$, siendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
b) El método de Euler hacia adelante consiste en considerar la iteración $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$, siendo y_0 el dato inicial, y $t_n = t_0 + nh$ para cierto paso fijo de discretización h.
Con la notación anterior, el método del Trapecio consiste en la siguiente iteración: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}))$, utilizando el dato inicial y_0 conocido. Obsérvese que a diferencia del método de Euler hacia adelante, en este último es necesario resolver una ecuación no lineal para avanzar en la iteración, siempre que f sea una función no lineal.
c) Para resolver de forma exacta el PVI $y'(t) = 3y(t) - t$ con dato inicial $y(0) = 0$ resolvemos en primera instancia el problema homogéneo y luego agregamos una solución particular. Al buscar una solución particular lineal se ve que $y_P(t) = \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}$ es solución particular. El problema homogéneo tiene como solución $y_H(t) = ce^{3t}$. Luego la solución tiene la forma $y(t) = y_H(t) + y_P(t) = ce^{3t} + \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}$. Imponiendo la condición inicial $y(0) = 0$ es posible despejar $c = -\frac{1}{9}$, y reemplazando se tiene finalmente la solución $y(t) = \frac{1}{9}(3t + 1 - e^{3t})$.
d) El valor correcto es $y(1) = \frac{4-e^3}{9} \simeq -\frac{16}{9}$. Al aplicar el método de Euler hacia adelante se obtiene: $y_1^E = 0$, $y_2^E = -\frac{1}{4}$. Por otra parte, al aplicar el método del Trapecio se consigue: $y_1^T = -\frac{1}{2}$, $y_2^T = -5$. Los respectivos errores son entonces: $e^E \simeq \frac{55}{36}$ y $e^T \simeq \frac{116}{36}$. Es decir que, en este caso, la estimación de Euler tiene menor error absoluto que la de Trapecio.

Problema 3 (30 puntos)

a) La norma inducida por una norma vectorial es $\|A\|_m = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$.

b) Si x es un vector propio de A cualquiera con valor propio λ, entonces:

$$\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \frac{\|\lambda x\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda|$$

Por su definición, tenemos entonces que la norma inducida supera a la magnitud de cada valor propio de A, por lo que $\rho(A) \leq \|A\|_m$.

c) Sean A y x matriz y vector cualesquiera. Si x es vector nulo su norma es nula, y el resultado es evidente. En caso contrario tenemos que $\|A\|_m \geq \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$, y $\|A\|_m\|x\|_v \geq \|Ax\|_v$, como se quería demostrar.

d) $\|x_{n+1} - \alpha\|_2 = \|\varphi(x_n) - \varphi(\alpha)\|_2 = \|Q(x_n - \alpha)\|_2 \leq \|Q\|_2\|x_n - \alpha\|_2$, donde se ha utilizado la submultiplicatividad, y las propiedades de φ de la letra.

Por inducción completa en naturales se deduce que:

$$\|x_n - \alpha\|_2 \leq (\|Q\|_2)^n\|x_0 - \alpha\|_2.$$

Por letra tenemos que $\|Q\|_2 < 1$, por lo que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α.