

Examen - Métodos Numéricos

27 de julio de 2018

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 - Ecuaciones No Lineales (35 puntos)

- Definir orden y velocidad de convergencia de una sucesión.
- Enunciar y demostrar el Teorema de órdenes de un MIG en ecuaciones no lineales.
- Hallar el orden y velocidad de convergencia del método de Newton-Raphson para buscar la raíz de la función $f(x) = x^2$.
- Calcular la menor cantidad de pasos de N-R, necesarios para obtener un error absoluto menor que un milésimo en la estimación de la raíz, partiendo de $x_0 = 1$.

Problema 2 - Ecuaciones Diferenciales (35 puntos)

- Definir Problema de Valores Iniciales (PVI).
- Deducir los métodos de Euler hacia adelante y Trapecio.
- Resolver de forma exacta el PVI $y'(t) = 3y(t) - t$ con dato inicial $y(0) = 0$.
Sugerencia: buscar una solución particular de la forma: $y_P(t) = at + b$.
- Analizar el error absoluto cometido por los dos métodos anteriores para estimar $y(1)$, usando paso $h = \frac{1}{2}$. Para el cálculo del error se puede asumir que $e^3 \simeq 20$.

Problema 3 - Sistemas Lineales (30 puntos)

- Definir norma operador (o norma inducida) $\|\cdot\|_m$ para matrices cuadradas, dada una norma vectorial $\|\cdot\|_v$.
- Definir radio espectral y demostrar que verifica: $\rho(A) \leq \|A\|_m$.
- Demostrar que la norma inducida verifica la propiedad de submultiplicatividad: $\|Ax\|_v \leq \|A\|_m \|x\|_v, \forall A \in \mathcal{M}^{n \times n}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- Sea A una matriz cuadrada no singular, b un vector en \mathbb{R}^n y α la única solución del sistema lineal $Ax = b$. Consideremos el método iterativo $x_{k+1} = \varphi(x^k) = Qx^k + r$, donde Q y r se eligen de manera que $\|Q\|_2 < 1$ y $\alpha = Q\alpha + r$.
Demostrar que la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a α para toda condición inicial.