Solución Examen - Métodos Numéricos

23 de Febrero de 2018

Problema 1 (35 puntos)

a) Ver teórico.
b) Ver teórico.
c) Ver teórico.

Problema 2 (35 puntos)

a) Ver teórico.
b) Consideremos un MIG $X_{k+1} = g(X_k)$ para aproximar una solución α de $g(X) = X$. Las siguientes son tres posibles condiciones suficientes para garantizar que X_k converge a α, para todo punto inicial suficientemente próximo a α:
   - g es una $r-$contracción en un entorno de α
   - g es diferenciable y existe una norma matricial y un número m tal que: $||J_g(x, y)|| \leq m < 1$ en un entorno de α
   - $g \in \mathbb{C}^1$ y existe una norma matricial tal que $||J_g(\alpha)|| < 1$

   El método de NR es un MIG con $g(X) = X - [J_f(X)]^{-1} f(X)$, por lo que valen las anteriores condiciones.
c) i) El método de Newton-Raphson para resolver sistemas de ecuaciones no lineales está dado por:

$$X_{k+1} = X_k - [J_f(X_k)]^{-1} f(X_k) \tag{1}$$

Luego a partir de la ecuación anterior, obtenemos:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

ii) Imponiendo $f(x, y) = (0, 0)$, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y^2 - 1 = 0 \\ 1 - 4y = 0 \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene que f tiene una única raíz $\alpha = \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{4}\right)$.

Luego, para analizar la convergencia del método es necesario expresar el mismo como un problema de punto fijo: $X_{k+1} = g(X_k)$. Partiendo de la Ecuación (1), identificamos que NR es un MIG con:

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 2y^2 - 1 \\ 1 - 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y^2 - y + 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Luego, calculamos la matriz jacobiana de la función g:

$$J_g(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 4y - 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Evaluando en α se tiene: $J_g(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, por lo que $\|J_g(\alpha)\| < 1$ para cualquier norma matricial. Como además $g \in \mathbb{C}^1$, se concluye que el método NR es convergente a α, para todo punto inicial suficientemente cercano a α.

Problema 3 (35 puntos)

a) i) Ver teórico.
   ii) Ver teórico.

b) Siguiendo la sugerencia, tenemos:

$$f(x+h) = f(x) + f^{'}(x)h + f^{''}(x)\frac{h^2}{2} + f^{'''}(x)\frac{h^3}{6} + f^{(IV)}(\eta)\frac{h^4}{24} \qquad \eta \in (x, x+h)$$

$$f(x-h) = f(x) - f^{'}(x)h + f^{''}(x)\frac{h^2}{2} - f^{'''}(x)\frac{h^3}{6} + f^{(IV)}(\psi)\frac{h^4}{24} \qquad \psi \in (x, x-h)$$

De acuerdo a la definición del estimador, se tiene:

$$D(h) = f^{''}(x) + \left(f^{(IV)}(\eta) + f^{(IV)}(\psi)\right)\frac{h^2}{24} = f^{''}(x) + E_T(h)$$

Por lo tanto el error de truncamiento es de orden dos.

c) Si extendemos el desarrollo de Taylor, tenemos:

$$f(x+h) = f(x) + f^{'}(x)h + f^{''}(x)\frac{h^2}{2} + f^{'''}(x)\frac{h^3}{6} + f^{(IV)}(x)\frac{h^4}{24} + f^{(V)}(x)\frac{h^5}{120} + o(h^6)$$

$$f(x-h) = f(x) - f^{'}(x)h + f^{''}(x)\frac{h^2}{2} - f^{'''}(x)\frac{h^3}{6} + f^{(IV)}(x)\frac{h^4}{24} - f^{(V)}(x)\frac{h^5}{120} + o(h^6)$$

Sumando y operando:

$$D(h) = f^{''}(x) + f^{(IV)}(x)\frac{h^2}{12} + o(h^4)$$

Sustituyendo aquí por $h/2$, se tiene:

$$D(h/2) = f^{''}(x) + \frac{f^{(IV)}(x)}{12}\frac{h^2}{2^2} + o(\frac{h^4}{2^4})$$

En consecuencia, el estimador dado por la Extrapolación de Richardson resulta:

$$R(h) = \frac{2^2 D(h/2) - D(h)}{2^2 - 1} = \frac{4D(h/2) - D(h)}{3} = f^{''}(x) + o(h^4)$$

Como se puede apreciar, el error de truncamiento de este nuevo estimador tiene orden cuatro.