

Examen - Métodos Numéricos

Viernes 23 de febrero de 2018

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (35 puntos)

Dado un Problema de Mínimos Cuadrados Lineal: (PMCL) $\min_x \|b - Ax\|_2$, con $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $x \in R^n$, con $m > n$. Se pide:

- Demuestre la equivalencia entre el PMCL y las Ecuaciones Normales asociadas (directo y recíproco).
- Describa la descomposición SVD (descomposición en valores singulares) de una matriz $A \in R^{m \times n}$.
- Explique cómo se puede utilizar la descomposición SVD para obtener la solución de norma mínima del PMCL.

Problema 2 (35 puntos)

- Deducir el Método de Newton-Raphson (NR) para encontrar una raíz α de la ecuación $f(X) = \vec{0}$, con $f : R^n \rightarrow R^n$.
- Indique una condición suficiente para garantizar la convergencia del método anterior a una raíz α .
- Sea $f(x, y) = (x + 2y^2 - 1, 1 - 4y)$.
 - Partiendo de $X_0 = (0, 0)$ calcular X_1 aplicando NR.
 - Calcule la raíz exacta de $f(x, y) = 0$ y analice la convergencia de NR a dicha raíz.

Problema 3 (30 puntos)

- Sea $\bar{p}(h)$ un estimador de p , que cumple la siguiente relación: $\bar{p}(h) = p + O(h^k)$, donde $O(h^k) = a_k h^k + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i h^i$ es un infinitésimo en h de orden k .
 - Deducir el estimador dado por la Extrapolación de Richardson.
 - Indique qué ventajas y desventajas tiene el uso del estimador obtenido con Richardson en comparación con el original.
- Se desea estimar la derivada segunda de una función $f \in C^\infty$ en un valor x dado, usando el siguiente estimador:

$$D(h) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Halle el error de truncamiento cometido en la aproximación, indicando el orden de dicho error.

Sugerencia: utilice Taylor de orden tres con resto de Lagrange.

- Aplique extrapolación de Richardson para obtener un mejor estimador de $f''(x)$. Indicar el orden del error de truncamiento cometido con este nuevo estimador.