Examen - Métodos Numéricos

SOLUCION - Febrero de 2018

Problema 1 - Ecuaciones No Lineales (35 puntos)

Ver teórico.

Problema 2 - Sistemas Lineales (35 puntos)

a,b,c) Ver teórico.

d) El polinomio característico de Q_J es $p(\lambda) = det(Q_J - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$. La condición de convergencia es $\frac{|a_{12}a_{21}|}{|a_{11}a_{22}|} < 1$. El polinomio característico de Q_{GS} es $q(\lambda) = det(Q_{GS} - \lambda I) = \lambda(\lambda - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}})$. Luego, ambos métodos convergen si y solo si $|a_{12}a_{21}| < |a_{11}a_{22}|$.

Problema 3 - Interpolación (30 puntos)

a) Sea f una función par. En particular sabemos que $f(x_i) = f(-x_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sean l_k y l_{-k} los polinomios de la base de Lagrange asociados a las respectivas abscisas x_k y $-x_k$. Por definición:

$$l_k(x) = \frac{x\prod_{i\neq k}(x - x_i)\prod_i(x + x_i)}{x_k\prod_{i\neq k}(x_k - x_i)\prod_i(x_k + x_i)} = \frac{x[\prod_{i\neq k}(x^2 - x_i^2)](x + x_k)}{2x_k^2[\prod_{i\neq k}(x_k^2 - x_i^2)]} \tag{1}$$

Mientras que:

$$l_{-k}(x) = \frac{x\prod_i(x - x_i)\prod_{i\neq k}(x + x_i)}{x_k\prod_i(x_k - x_i)\prod_{i\neq k}(x_k + x_i)} = \frac{x[\prod_{i\neq k}(x^2 - x_i^2)](x - x_k)}{2x_k^2[\prod_{i\neq k}(x_k^2 - x_i^2)]} \tag{2}$$

Por evaluación directa de las Ecuaciones (1) (2) se obtiene que $l_k(-x) = l_{-k}(x)$. Si denotamos mediante l_0 al polinomio de la base de Lagrange asociado a $x = 0$ es directo obtener que $l_0(x) = l_0(-x)$. Entonces, el polinomio interpolante buscado $p(x)$ cumple que:

$$p(-x) = \sum_{k=-n}^{n} f(-x_k)l_k(-x) = \sum_{k=-n}^{n} f(-x_k)l_{-k}(x) = p(x),$$

como se quería demostrar.

b) El polinomio interpolante de Lagrange se puede expresar directamente como combinación lineal de la base de Lagrange:

$$p(x) = \frac{1}{2}\frac{x(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{4})(x-\pi)}{\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4})(\frac{\pi}{4}-\pi)} + \frac{1}{2}\frac{x(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{\frac{3\pi}{4}(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4})(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2})(\frac{3\pi}{4}-\pi)} + 1\frac{x(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{3\pi}{4})(x-\pi)}{\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4})(\frac{\pi}{2}-\pi)}$$

c) El polinomio trasladado $u(x) = p(x + \frac{\pi}{2})$ es par y su grado es 4 o menor. Por lo tanto, admite la siguiente expresión:

$$u(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

Puesto que $u(0) = p(\frac{\pi}{2}) = 1$ tenemos que $c = 1$. Además tenemos que $u(-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ y $u(-\frac{\pi}{2}) = p(0) = 0$. Resolviendo el anterior sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas obtenemos que $a = -\frac{-64}{\pi^4}$ y $b = \frac{12}{\pi^2}$. El polinomio pedido se obtiene eliminando la traslación $p(x) = u(x + \frac{pi}{2})$ y aplicando distributiva. Otra posibilidad es aplicar distributiva a la interpolación de Lagrange obtenida en la Parte (b).