Examen - Métodos Numéricos

Diciembre de 2017

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 - Ecuaciones No Lineales (35 puntos)

a) Enunciar y demostrar el Teorema del Punto Fijo.
b) Enunciar el Teorema del Orden de Convergencia.
c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^3 con única raíz real α.
Elegir a y b reales para maximizar el orden de convergencia a α del MIG dado por:

$$x_0 = 1$$
$$x_{n+1} = ax_n + b\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

d) Probar que el MIG anterior converge si se toma $f(x) = x^2$.
Calcular su orden de convergencia.

Problema 2 - Sistemas Lineales (35 puntos)

a) Enunciar el Teorema de caracterización de Convergencia.
b) Definir en forma vectorial el método de Jacobi.
c) Demostrar que si la matriz es diagonal dominante en sentido estricto por filas, el método de Jacobi converge.
d) Sea A una matriz 2×2 de entradas reales y b un vector en $\mathbb{R}^2$.
Discutir convergencia de Jacobi a la solución del sistema $Ax = b$ en función de los parámetros $\{a_{ij}\}_{1\le i,j\le 2}$ y $b = (b_1, b_2)^t$.

Problema 3 - Interpolación (30 puntos)

a) Enunciar y demostrar el Teorema del Error por Interpolación Polinómica.
b) Se considera $f : f(x) = e^x$ definida en el intervalo $[0, 1]$. Expresar, para cada entero positivo n, el polinomio interpolante $p_n(x)$ de f por las $n + 1$ abscisas equiespaciadas $\{\frac{i}{n}, i = 0, \dots, n\}$.
c) Sea $\{E_n\}_{n\ge1}$ la sucesión de errores: $E_n = \text{máx}_{x\in[0,1]} |p_n(x) - f(x)|$.
Estudiar acotación de $\{E_n\}_{n\ge1}$.
d) Decidir si la familia de polinomios $\{p_n(x)\}$ converge uniformemente a f en $[0, 1]$.
Sugerencia: Estudiar el límite de la sucesión $\{E_n\}_{n\ge1}$.