Examen - Métodos Numéricos

Julio de 2013

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Ejercicio 1 (35 puntos)

Dado un sistema de EDOs, con $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ y $F(Y,t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = F(Y(t), t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

Se define el el método de Heun para resolver el sistema de EDOs:

$$\text{Método de Heun} \begin{cases} Y_0 = Y(t_0) \\ P_{k+1} = Y_k + hF(Y_k, t_k) \\ Y_{k+1} = Y_k + h/2[F(Y_k, t_k) + F(P_{k+1}, t_{k+1})] \end{cases}$$

1) Describa brevemente qué caracteriza un método como implícito o como explícito. Clasifique el Método de Heun.
2) Defina el problema test y halle la desigualdad que define la región de estabilidad del método de Heun.
3) Pruebe que la región de estabilidad, definida en el plano complejo, es simétrica respecto del eje real.
4) Calcule mediante el método de Heun, usando $h = 1$, una aproximación en $t = 3$ de la solución de la siguiente EDO de segundo orden.

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = -\dot{y}(t) - y(t) + 1 \\ y(0) = -1 \\ \dot{y}(0) = 1 \end{cases}$$

Problema 2 (35 puntos)

Integración Numérica y Método de Gauss:

1) Definir grado de exactitud de un método de integración numérica.
2) Definir el Método de Gauss de integración numérica.
3) ¿Qué cantidad de puntos requiere el Método de Gauss para integrar correctamente el monomio x^n? Justificar.
4) Dadas las absisas: $x_{1,2} = \pm\sqrt{1/3}$ y los pesos: $w_{1,2} = +1$, evalúe numéricamente mediante el Método de Gauss la siguiente integral:

$$\int_0^{3/2\pi} |\sin(x)|dx$$

Calcule la integral exactamente y luego evalúe el error relativo resultante.

Ejercicio 3 (30 puntos)

Dado un Problema de Mínimos Cuadrados:

$$\text{(PMC): } \min_{x} \|b - Ax\|_2$$

Con $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, con $m > n$.

1) Muestre la equivalencia entre las ecuaciones normales y el PMC (Directo y Recíproco).
2) i) Describa la descomposición QR de la matriz A.
   ii) Describa cómo resolver el PMC usando la descomposición QR de A.
3) Resolver el PMC mediante QR para la siguientes matrices A y b.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Podrá usar el dato que $A = QR$ con:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ +1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución Examen - Métodos Numéricos

Julio de 2017

Ejercicio 1 (35 puntos)

1) Ver teórico.
2) El problema test, dado $q \in \mathbb{C}$ es:

$$\text{Problema Test} \begin{cases} \dot{y}(t) = qy(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Aplicando el Mtodo de Heun, con $f(y,t) = qy$, resulta:

$$y_{k+1} = [1 + hq + (hq)^2/2]y_k$$

De donde la condición de estabilidad es con $z = qh \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : |1 + z + z^2/2| \leq 1\}$$

3) Resta mostrar que la región de estabilidad es simétrica respecto del eje real. Esto es lo mismo que mostrar que si $z \in \mathcal{R}$ entonces $\bar{z} \in \mathcal{R}$.

Tomando $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$:

$$\begin{aligned}
|1 + \bar{z} + \bar{z}^2/2| &= |1 + (a - bi) + (a - bi)^2/2| \\
&= |(1 + a + a^2/2 - b^2/2) + i(-b - ab)| \\
&= \sqrt{(1 + a + a^2/2 - b^2/2)^2 + (-b - ab)^2} \\
&= \sqrt{(1 + a + a^2/2 - b^2/2)^2 + (b + ab)^2} \\
&= |(1 + a + a^2/2 - b^2/2) + i(b + ab)| \\
&= |1 + (a + bi) + (a + bi)^2/2| \\
&= |1 + z + z^2/2|
\end{aligned}$$

Esto muestra que la región de estabilidad contiene a z y $\bar{z}$. Por lo tanto es simétrica respecto del eje real.

4) Se define la variable $z(t) = \dot{y}(t)$ y el vector solucin del sistema 2×2 de EDOs igual a $Y(t) = [y(t), z(t)]^T$.

A partir de eso el mtodo de Heun se plantea como:

$$Y_{k+1} = Y_k + h/2\,(F(P_k, t_{k+1}) + F(Y_k, t_k))$$
$$P_k = Y_k + hF(Y_k, t_k)$$

La siguiente tabla resume los cálculos realizados.

k	t_k	$Y_k^{(1)}$	$Y_k^{(2)}$	$P_k^{(1)}$	$P_k^{(2)}$
0	0	-1.000E+0	+1.000E+0	+0.000E+0	+2.000E+0
1	1	+5.000E-1	+1.000E+0	+1.500E+0	+5.000E-1
2	2	+1.250E+0	+2.500E-1	+1.500E+0	-2.500E-1
3	3	+1.250E+0	-1.250E-1	+1.125E+0	-2.500E-1

Ejercicio 2 (30 puntos)

1) Ver teórico.

2) Ver teórico.
3) Ver teórico.
4) Se debe realizar un cambio de variable de manera de escribir la integral en el intervalo $[-1, +1]$. Esto se puede hacer de varias maneras, una de ellas es deduciendo que:

$$\int_a^b f(u)du = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{b-a}{2}v + \frac{b+a}{2}\right) dv$$

Con lo cual dadas las absisas (x_i) y pesos (w_i) dados se puede aproximar la integral como:

$$\int_a^b f(u)du \simeq \frac{b-a}{2} \sum_{1,2} w_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right)$$

Evaluando resulta:

$$\int_0^{3\pi/2} |sin(u)|du \simeq \frac{3\pi}{4}\left[\left|\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{3\pi}{4}\right)\right| + \left|\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{3\pi}{4}\right)\right|\right]$$

Y el resultado numérico del método de Gauss es:

$$\int_0^{3\pi/2} |sin(u)|du \simeq 3.26$$

La integral exacta se calcula de la siguiente manera:

$$\int_0^{3\pi/2} |sin(u)|du = \int_0^{\pi} sin(u)du + \int_{\pi}^{3\pi/2} -sin(u)du$$

$$\int_0^{3\pi/2} |sin(u)|du = 2 + 1 = 3$$

El error relativo resulta entonces:

$$\text{Error Relativo} = \frac{|3.26 - 3|}{|3|} = 0.086$$

Ejercicio 3 (35 puntos)

1) Ver Teórico.
2) Parte i), ver Teórico. Parte ii), ver teórico.
3) Las tres primeras columnas de Q se llaman Q_1. Las primeras tres filas de R se llaman R_1. La descomposición QR se puede escribir como:

$$A = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a la izquierda por Q_1^T obtenemos:

$$Q_1^T A = R_1$$

Usando la ecuación anterior hallamos fácilmente R_1, mediante un producto de matrices:

$$R_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & -1/\sqrt(3) \\ 0 & -\sqrt{3} & 1/\sqrt(3) \\ 0 & 0 & 2/\sqrt(3) \end{bmatrix}$$

Se calcula a continuación $Q_1^T b$:

$$Q_1^T b = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solución al PMC usando la descomposición QR es x tal que: $R_1 x = Q_1^T b$. Realizando la sustitución hacia atrás necesaria se obtiene:

$$x = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$