Examen - Métodos Numéricos

28 Julio de 2017

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Ejercicio 1 (35 puntos)

Dado un sistema de EDOs, con $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ y $F(Y,t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = F(Y(t), t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

Se define el el método de Heun para resolver el sistema de EDOs:

$$\text{Método de Heun} \begin{cases} Y_0 = Y(t_0) \\ P_{k+1} = Y_k + hF(Y_k, t_k) \\ Y_{k+1} = Y_k + h/2[F(Y_k, t_k) + F(P_{k+1}, t_{k+1})] \end{cases}$$

1) Describa brevemente qué caracteriza un método como implícito o como explícito. Clasifique el Método de Heun.
2) Defina el problema test y halle la desigualdad que define la región de estabilidad del método de Heun.
3) Pruebe que la región de estabilidad, definida en el plano complejo, es simétrica respecto del eje real.
4) Calcule mediante el método de Heun, usando $h = 1$, una aproximación en $t = 2$ de la solución de la siguiente EDO de segundo orden.

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = -\dot{z}(t) - z(t) + 1 \\ z(0) = -1 \\ \dot{z}(0) = 1 \end{cases}$$

Problema 2 (35 puntos)

Integración Numérica y Método de Gauss:

1) Definir grado de exactitud de un método de integración numérica.
2) Definir el Método de Gauss de integración numérica.
3) ¿Qué cantidad de puntos requiere el Método de Gauss para integrar correctamente el monomio x^n? Justificar.
4) El Método de Gauss de dos puntos, para integración en el intervalo $[-1, 1]$, está definido por puntos (x_i, w_i) con abscisas $\{x_1 = -\sqrt{1/3}, x_2 = +\sqrt{1/3}\}$ y pesos $\{w_1 = +1, w_2 = +1\}$.

   Evalúe numéricamente mediante el Método de Gauss la siguiente integral:

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin(x)| dx$$

   Calcule la integral de forma exacta y evalúe el error relativo resultante.

Ejercicio 3 (30 puntos)

Dado un Problema de Mínimos Cuadrados Lineales:

$$\text{(PMCL): } \min_x \|b - Ax\|_2^2$$

Con $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $x \in \mathbb{R}^n$, con $m > n$.

1) Demuestre la equivalencia entre las ecuaciones normales y el PMCL (directo y recíproco).
2) Describa la descomposición QR de la matriz A.
3) Describa cómo resolver el PMCL usando la descomposición QR de A.
4) Resolver el PMCL mediante QR para la siguientes matrices A y b.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Podrá usar el dato que $A = QR$ con:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$