Solución Examen - Métodos Numéricos

Martes 21 de febrero de 2017

Problema 1 (30 puntos)

a) Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ no singular. Sea α la solución del sistema $Ax = b$.
Para obtener α se propone la siguiente iteración estacionaria de orden uno:

$$x^{k+1} = Qx^k + r,$$

siendo r un vector fijo de $\mathbb{R}^n$ y Q una matriz $n \times n$, tal que $\alpha = Q\alpha + r$.

Teorema 1. *La sucesión $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α para cualquier x^0 si y solamente si el radio espectral de Q es $\rho(Q) < 1$.*

b) El método de Jacobi consiste en despejar la i-ésima variable de la i-ésima ecuación a efectos de definir un método iterativo. Concretamente, se parte de un vector inicial $x^{(0)}$, y cada coordenada se actualiza siguiendo la iteración:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}, \forall i = 1, \ldots, n.$$

donde se asume que $a_{ii} \neq 0$. En caso contrario, se acostumbra intercambiar el orden de las ecuaciones, de manera que la matriz A no tenga ceros en la diagonal. Si reescribimos en términos matriciales tenemos que:

$$Dx^{(k+1)} = b - (A - D)x^{(k)},$$

siendo D la matriz diagonal, donde su diagonal es idéntica a la de la matriz A. Puesto que $det(D) = \prod_i a_{ii} \neq 0$, podemos invertir en ambos miembros, y el método de Jacobi se puede expresar como uno iterativo lineal estacionario de orden uno:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(D - A)x^{(k)} + D^{-1}b = Qx^{(k)} + r,$$

siendo $Q = D^{-1}(D - A)$ y $r = D^{-1}b$ matriz y vector fijos (de allí el descriptivo de *estacionario* del método de Jacobi).

c) En la relajación de Jacobi se introduce un parámetro real w que da peso a la nueva información y retiene con factor $1 - w$ a la iteración anterior:

$$x_i^{(k+1)} = w\frac{b_i - \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}} + (1 - w)x_i^{(k)}, \forall i = 1, \ldots, n.$$

Al reescribir en términos matriciales tenemos que:

$$Dx^{(k+1)} = wb - w(A - D)x^{(k)} + (1 - w)Dx^{(k)}.$$

Usando nuevamente que D es invertible:

$$x^{(k+1)} = [(1 - w)I + wD^{-1}(D - A)]x^{(k)} + wD^{-1}b = Q'x^{(k)} + r',$$

siendo $Q' = wQ + (1 - w)I$ la nueva matriz multiplicativa y $r' = wr$.

d) Notemos primeramente que si λ es valor propio de Q, entonces $w\lambda + (1 - w)$ es valor propio de Q'. Para probarlo, tomemos un vector propio v de Q asociado a λ. Entonces:

$$Q'v = wQv + (1 - w)v = (w\lambda + (1 - w))v = \lambda' v,$$

por lo que v también es vector propio de Q', y lo que cambia es el valor propio $\lambda' = w\lambda + (1 - w)1$. Obsérvese que si $w \in [0, 1]$, el valor propio λ' pertenece

al segmento del plano complejo cuyos extremos son λ y 1. En particular, si $w = 0$ tenemos que $\lambda' = 1$, mientras que si $w = 1$ resulta $\lambda' = \lambda$. Procedemos ahora a buscar w de manera que $\rho(Q') < 1$. Probaremos el resultado mediante un argumento geométrico: el segmento delimitado por λ y $1 + 0i$ corta al disco unidad. Seleccionando entonces un valor de w positivo y cercano a 0 se asegura que cada λ' pertenezca al círculo unidad. Por razones de completutid daremos una prueba analítica: sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valores propios de Q. Entonces $\lambda_i = a_i + ib_i$ para ciertos reales $a_i < 1$, y la desigualdad:

$$|w(a_i + ib_i) + 1 - w|^2 = w^2[(a_i - 1)^2 + b_i^2] + 2(a_i - 1)w + 1 < 1$$

se cumple si y solo si $w^2[(a_i - 1)^2 + b_i^2] + 2(a_i - 1)w < 0$. Basta con hallar $w > 0$ tal que $w[(a_i - 1)^2 + b_i^2] < 2(1 - a_i)$. Pero por hipótesis $1 - a_i > 0$. Seleccionando $w = \text{mín}_i \frac{1-a_i}{(a_i-1)^2+b_i^2}$ se cumple el enunciado. Como conclusión, podemos apreciar la fortaleza de la relajación: hemos construido un método convergente partiendo de otro que posiblemente no sea convergente.

Problema 2 (35 puntos)

a) La Extrapolación de Richardson permite mejorar el orden del error de truncamiento de una estimación numérica. Si p es el número a estimar y tenemos el estimador $\overline{p}(h)$ que cumple:

$$\overline{p}(h) = p + a_k h^k + \sum_{i=k+1}^{+\infty} a_i h^i,$$

entonces, tomando un real $q > 1$ podemos construir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\overline{p}(h) = p + a_k h^k + \sum_{i=k+1}^{+\infty} a_i h^i,$$

$$\overline{p}(h/q) = p + a_k (h/q)^k + \sum_{i=k+1}^{+\infty} a_i (h/q)^i.$$

Finalmente, combinando ambas ecuaciones es posible definir el nuevo estimador $\hat{p}$ para p:

$$\hat{p}(h) = \frac{q^k \overline{p}(h/q) - \overline{p}(h)}{q^k - 1} \tag{1}$$

Obsérvese que el error de truncamiento de $\overline{p}$ es k, mientras que el de $\hat{p}$ es $k+1$, o superior.

b) Recordemos que el Problema de Valores Iniciales (PVI) consiste en resolver $y'(t) = f(t, y(t))$ sujeto a $y(t_0) = a$ conocido. Definamos $t_n = t_0 + nh$, para cierto número real positivo h llamado paso de discretización. Integrando en ambos miembros tenemos que:

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt. \tag{2}$$

Pese a no conocer la segunda integral, es posible diversas aproximaciones, que permiten construir distintos métodos iterativos. En el caso concreto de Euler hacia adelante se considera $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt \approx hf(t_n, y(t_n))$. Nuevamente, como no se conocen ninguno de los valores $y(t_n)$ salvo $y_{t_0} = a$, al reemplazar en ambos miembros por sus estimadores se tiene que:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n),$$

donde $y(t_0) = a$ es conocido. Este método iterativo se llama método de Euler hacia adelante.

c) Para resolver $y'(t) = y(t)+1$ con dato inicial $y(0) = 0$, adicionamos una solución particular a la solución homogénea. Se observa que la función constante $y_P(t) = -1$ es solución particular, mientras que $y_H(t) = ce^t$ es solución del problema homogéneo. Luego, $y(t) = ce^t - 1$. Para fijar c imponemos la condición inicial $y(0) = 0$, y resulta $c = 1$, es decir, $y(t) = e^t - 1$.

d) Sabemos que $y(1) = e - 1$, y el PVI se define por $f(t, y) = y + 1$. Apliquemos el método de Euler hacia adelante con paso $h = 1/2$, partiendo de $y_0 = y(0) = 0$:

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 0 + \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2};$$
$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{5}{4}$$

Como usamos paso $h = \frac{1}{2}$ partiendo de $t_0 = 0$, $y_2 = \frac{5}{4}$ es el estimador proveniente de aplicar Euler hacia Adelante. El error cometido es $e - 1 - \frac{5}{4} = e - \frac{9}{4}$.

e) Para cada entero positivo N se puede elegir $h = \frac{1}{N}$ avanzar N pasos con Euler hacia adelante, desde 0 hasta 1. Sea $y^E(h)$ tal estimación numérica de $y(1) = e-1$. Recordando que el método de Euler hacia adelante es consistente con orden 1, resulta $k = 1$ en el uso de la Extrapolación de Richardson. Sustituyendo en (**??**) con $q = 2$ y $k = 1$ tenemos que el estimador de Richardson es:

$$y^* = 2y^E(h/2) - y^E(h).$$

Hay dos manera inmediatas de elegir h para reutilizar el estimador antes obtenido. Si $h = 1$ tenemos que $y^E(h) = y_0 + 1f(t_0, y_0) = 1$, y ya conocemos $y^E(1/2) = y_2 = \frac{5}{4}$ por la parte anterior. Se ve que si bien el estimador $y^E(1) = 1$ es pobre para aproximar $e - 1$, la mejora sugerida por Richardson entrega $y^* = 2y_2 - y^E(1) = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$, que es naturalmente una mejor estimación. Se tomaba correcto el uso de otras selecciones de q y h compatibles con la naturaleza del problema (es decir, $h = \frac{1}{N}$ para cierto entero positivo N y $q \geq 2$ entero positivo).

Problema 3 (35 puntos)

a)

Teorema 2 (Punto Fijo)**.** *Si X es un espacio métrico completo y $\varphi : X \to X$ una r-contracción con $r < 1$, entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge al punto fijo de φ, que además es único. El resultado no depende del elemento inicial $x_0 \in X$.*

b) Todo sistema no lineal se puede expresar en términos de hallar la raíz de $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. El método de Newton Raphson asume f diferenciable, y proviene de una linealización de f. Partiendo de una semilla $x^0 \in \mathbb{R}^m$ que es estimación inicial de la raíz, se desea hallar la raíz de F:

$$F(x) \approx F(x^0) + J_F(x^{(0)})(x - x^{(0)}) = \vec{0}, \tag{3}$$

siendo $J_F(x^{(0)})$ es la matriz Jacobiana de F en $x = x^{(0)}$, que almacena en la entrada (i, j) la derivada de la componente i del vector $F = (F_1, \ldots, F_n)$ con respecto a la variable x_j del vector $x = (x_1, \ldots, x_m)$. La Expresión (**??**) sugiere la siguiente iteración, que es conocida como el método de Newton-Raphson para sistemas no lineales:

$$x^{(0)} \in \mathbb{R}^m,$$
$$J_F(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -f(x^{(k)}).$$

El criterio de terminación puede consistir en cantidad máxima de iteraciones (asegurando un esfuerzo computacional limitado), un error residual $\|F(x_k)\| < \epsilon$ para cierta tolerancia $\epsilon > 0$, una diferencia entre iterados $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon'$ para cierta tolerancia ϵ' o combinaciones, y el rendimiento de cada una dependerá de la dificultad de evaluación de F, su variabilidad y el cálculo del Jacobiano, entre otras.

c) Para probar que el sistema no lineal bajo estudio admite una única solución en $[-1,1]^2$, vamos a probar que estamos en las condiciones del Teorema del Punto Fijo para $f(x,y) = (\frac{1}{5}(y-1), \frac{1}{5}x^2)$. Tomemos la norma 1 en vectores para probar que f es r-contractiva para cierto $r < 1$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\|f(x_2,y_2) - f(x_1,y_1)\|^2 &= \|(\frac{1}{5}(y_2-1), \frac{1}{5}x_2^2) - (\frac{1}{5}(y_1-1), \frac{1}{5}x_1^2)\|^2 \\
&= \frac{1}{5}\|(y_2-y_1), (x_2-x_1)(x_2+x_1))\|^2 \\
&= \frac{1}{5}[(y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2(x_1+x_2)^2] \\
&\leq \frac{1}{5}[(y_2-y_1)^2 + 4(x_2-x_1)^2] \\
&\leq \frac{1}{5}[4(y_2-y_1)^2 + 4(x_2-x_1)^2] \\
&= \frac{4}{5}[(y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2] \\
&= \frac{4}{5}\|(x_2,y_2) - (x_1,y_1)\|^2,
\end{aligned}$$

por lo que tomando raíces se deduce que $r = \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$ es factor de contracción. Además, si $(x,y) \in [0,1]^2$ entonces también $f(x,y) \in [0,1]^2$, por lo que f es función r-contractiva en un espacio métrico completo. Por el Teorema del Punto Fijo, tiene una única raíz en $[-1,1]^2$.

d) Primero vamos a calcular la raíz de f. Por la primera ecuación tenemos que $y = 5x+1$. Reemplazando en la segunda tenemos que $25x+5 = x^2$, o $x^2-25x-5 = 0$. La única raíz en $[-1,1]$ es $x_\alpha = \frac{25-\sqrt{645}}{2}$. Además $y_\alpha = 5x_\alpha + 1$.
Para aplicar el método de Newton-Raphson debemos llevar el problema al de hallar una raíz. Consideremos entonces la función $F(x,y) = (5x-y+1, 5y-x^2)$. Su Jacobiano en un punto (x,y) es:

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2x & 5 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$J_F(0,0) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Para hallar $x_{(1)}$ debemos resolver el sistema $2x2$ de la forma $J_F(0,0)(x^{(1)}-x^{(0)}) = -F(x^{(0)})$. Recordando que utilizamos como estimación inicial al vector nulo, resulta que $F(x^{(0)}) = (1,0)$. Al resolver se consigue que $x^{(1)} = (-\frac{1}{5}, 0)$.