

Examen - Métodos Numéricos

Martes 21 de febrero de 2017

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Problema 1 (30 puntos)

- Enunciar el Teorema de Convergencia de métodos iterativos en Sistemas Lineales.
- Definir el método de Jacobi para la resolución de sistemas lineales. Expresar el método iterativo con la forma $x^{(k+1)} = Qx^{(k)} + r$, donde Q y r se deben hallar.
- Definir la relajación de Jacobi, y mostrar que la nueva matriz multiplicativa es $Q' = wQ + (1 - w)I$, siendo I la matriz identidad y w el parámetro real de la relajación.
- Demostrar que si todos los valores propios λ_i de Q verifican $Re\{\lambda_i\} < 1$, entonces existe algún parámetro de relajación w tal que el método relajado es convergente.

Problema 2 (35 puntos)

- Explicar la Extrapolación de Richardson.
- Deducir el método de Euler Hacia Adelante para la resolución del Problema de Valores Iniciales (PVI).
- Resolver de forma exacta el PVI $y'(t) = y(t) + 1$ con dato inicial $y(0) = 0$.
- Analizar el error cometido para estimar $y(1)$ usando Euler Hacia Adelante con paso $h = 1/2$.
- Utilizar la Extrapolación de Richardson para mejorar la estimación, y recalcular el error cometido.

Problema 3 (35 puntos)

- Enunciar el Teorema del Punto Fijo en espacios métricos.
- Deducir el método de Newton Raphson para sistemas no lineales. Indicar criterios de terminación.
- Probar que el siguiente sistema no lineal admite una única solución en $[-1, 1]^2$:

$$x = \frac{1}{5}(y - 1)$$

$$y = \frac{1}{5}x^2$$

- Reescribir el sistema no lineal y aplicar un paso del método de Newton-Raphson partiendo del vector nulo.

Fundamentar detalladamente cada respuesta.