Solución Examen - Métodos Numéricos

Febrero de 2017

Problema 1 (30 puntos)

a) Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ no singular. Sea α la solución del sistema $Ax = b$. Para obtener α se propone la siguiente iteración estacionaria:

$$x^{k+1} = Qx^k + r,$$

siendo r un vector fijo de $\mathbb{R}^n$ y Q una matriz $n \times n$, tal que $\alpha = Q\alpha + r$.

Teorema 1. *La sucesión $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α para cualquier x^0 si y solamente si el radio espectral de Q es $\rho(Q) < 1$.*

Proof. Sea $e_n = x^n - \alpha$ el error en el paso n. Utilizando que α es punto fijo de la iteración tenemos que:

$$e_{n+1} = x^{n+1} - \alpha = Qx^n + r - (Q\alpha + r) = Q(x^n - \alpha) = Qe_n.$$

Luego, por inducción en los naturales tenemos que $e_n = Q^n e_0$. Vamos ahora a probar el directo y el recíproco en partes:

($\rightarrow$) Supongamos por absurdo que $\rho(Q) \geq 1$. En tal caso, existe un valor propio λ de Q y un vector propio $v \neq 0$ tal que $Qv = \lambda v$. Elijamos x^0 de modo que $e_0 = v$. Esto es posible tomando $x^0 = \alpha + e_0$. Por lo anteriormente observado, tenemos que:

$$e_n = Q^n e_0 = Q^n v = \lambda^n v,$$

y tomando normas, tenemos que $\|e_n\| = |\lambda|^n \|v\|$. Tomando límites en ambos miembros, se consigue que $\lim_n \|e_n\| \neq 0$, pues $|\lambda| \geq 1$ y $\|v\| \neq 0$. Esto es decir que el error no tiende al vector nulo, o equivalentemente, que la sucesión $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a α en contradiccuón con la hipótesis.

($\leftarrow$) Por el Teorema de Householder, el radio espectral es el ínfimo de las normas operadores. Sea ϵ igual a la mitad de la distancia entre $\rho(Q)$ y 1, es decir, $\epsilon = \frac{1-\rho(Q)}{2}$. Por definición de ínfimo, existe una norma operador $\|\|_\epsilon$ tal que $\|Q\|_\epsilon - \rho(Q) < \epsilon$. Pero entonces:

$$\|Q\|_\epsilon < \rho(Q) + \epsilon = \frac{2\rho(Q) + (1 - \rho(Q))}{2} = \frac{1 + \rho(Q)}{2} < 1.$$

Hemos conseguido así una norma $\|\|_\epsilon$ compatible con una vectorial tal que $\|Q\|_\epsilon < 1$. Como $e_n = Q^n e_0$, tomando normas en cada miembro tenemos que:

$$\|e_n\| = \|Q^n e_0\| \leq (\|Q\|_\epsilon)^n \|e_0\|,$$

y tomando límite con n tenemos que $0 \leq \lim_n \|e_n\| \leq (\|Q\|_\epsilon)^n \|e_0\| = 0$. La única opción válida es que $\lim_n \|e_n\| = 0$, y por la primera propiedad de una norma tenemos que la sucesión de vectores $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al vector nulo. Esto significa que $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α. Obsérvese que el resultado vale independientemente del dato inicial x^0.

$\square$

b) Una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño $m \times n$ es diagonal dominante en sentido estricto por filas si $|a_i i| > \sum_{j\neq i,j=1}^{n} |a_{ij}|$, para cada fila $i = 1, \ldots, m$.

c) Jacobi responde a un método iterativo lineal y estacionario de orden uno, con matriz $Q_J = D^{-1}(D-A)$, siendo D la matriz diagonal que almacena las mismas entradas que la matriz característica A. Operando tenemos que $Q_J = (q_{ij})$, tal que $q_{ij} = 0$ si $i = j$, y $q_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ en caso contrario. Recordando que la norma infinito operador de una matriz coincide con el máximo de las normas 1 de sus filas, tenemos que:

$$\|Q_J\|_\infty = \max_i\{\sum_{j\neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}\} < 1,$$

donde se ha utilizado que A es diagonal dominante por filas en sentido estricto. Por el Teorema del radio espectral, tenemos que $\rho(Q_J)$ es el ńfimo de todas las normas compatibles para Q_J. Finalmente, como la norma operador infinito es una norma compatible en matrices, tenemos que $\rho(Q_J) \leq \|Q_J\|_\infty < 1$. Se aplica en estas condiciones el Teorema de convergencia en sistemas lineales, y en consecuencia el método de Jacobi es convergente, como se quería probar.

d) En el caso pedido tenemos que

$$Q_J = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es $p(\lambda) = |Q_J - \lambda I| = -\lambda(\lambda+2)(\lambda-2)$, por lo que $\rho(Q_J) = 2$, y en este caso el método de Jacobi no converge.

Problema 2 (35 puntos)

a) Un Problema de Valores Iniciales o PVI consiste en resolver una ecuación diferencial de la forma $y'(t) = f(t, y(t))$ con dato inicial $y(t_0) = y_0$, siendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

b) El método de Euler hacia adelante consiste en considerar la iteración $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$, siendo y_0 el dato inicial, y $t_n = t_0 + nh$ para cierto paso fijo de discretización h.
Con la notación anterior, el método del Trapecio consiste en la siguiente iteración: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}))$, utilizando el dato inicial y_0 conocido. Obsérvese que a diferencia del método de Euler hacia adelante, en este último es necesario resolver una ecuación no lineal para avanzar en la iteración, siempre que f sea una función no lineal.

c) Para resolver de forma exacta el PVI $y'(t) = 3y(t) - t$ con dato inicial $y(0) = 0$ resolvemos en primera instancia el problema homogéneo y luego agregamos una solución particular. Al buscar una solución particular lineal se ve que $y_P(t) = \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}$ es solución particular. El problema homogéneo tiene como solución $y_H(t) = ce^{3t}$. Luego la solución tiene la forma $y(t) = y_H(t) + y_P(t) = ce^{3t} + \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}$. Imponiendo la condición inicial $y(0) = 0$ es posible despejar $c = -\frac{1}{9}$, y reemplazando se tiene finalmente la solución $y(t) = \frac{1}{9}(3t + 1 - e^{3t})$.

d) El valor correcto es $y(1) = \frac{4-e^3}{9}$. Al aplicar el método de Euler hacia adelante se obtiene $y_1 = 0$, $y_2 = -\frac{1}{4}$. Por otra parte, al aplicar el método del Trapecio se consigue $y_1 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = -5$.

Problema 3 (35 puntos)

a)

Teorema 2. *Sea f de clase C^{p+1} en el intervalo $[x_0, x_n]$ y p_n el polinomio interpolante a f por las abscisas $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Luego, para cada $x \in [x_0, x_n]$ existe $\gamma(x) \in [x_0, x_n]$ tal que se cumple la siguiente igualdad para el error $E(x)$:*

$$E(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{p+1}}{(p+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Proof. Tomemos $x \in [x_0, x_n]$ fijo. Si $x = x_i$ para algún i, la igualdad es evidente, pues $E(x_i) = 0$. Supongamos entonces que x no coincide con ninguna de las abscisas. Consideremos la función auxiliar $F : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(t) = f(t) - p_n(t) - (f(x) - p_n(x)) \frac{\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}.$$

Se observa que $F(x_i) = 0$ para cada $i = 0, \ldots, n$, y además $F(x) = 0$, por lo que F tiene al menos $n+2$ raíces en $[x_0, x_n]$. Como f es de clase $\mathbb{C}^p$, resulta que F también es de clase $\mathbb{C}^p$. Sean $p_0 < p_1 \ldots < p_{n+1}$ las $n+2$ raíces de F. Aplicando el Teorema de Rolle en cada intervalo podemos asegurar que existen $n+1$ raíces $p'_0 < \ldots < p'_n$ para F'. Aplicando reiteradas veces el teorema de Rolle es posible asegurar la existencia de una raíz $\gamma_x \in [x_0, x_n]$ de la función $F^{(n+1)}$. Como p_n es un polinomio de grado n o menos, tenemos que su derivada de orden $n+1$ es nula. Entonces, al derivar $n+1$ veces la función F tenemos que:

$$F^{(n+1)}(\gamma_x) = f^{(n+1)}(\gamma_x) - (n+1)! \frac{f(x) - p_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} = 0.$$

Finalmente despejando $f(x) - p_n(x)$ se prueba el enunciado. □

b) El polinomio interpolante $p_n(x)$ de la función $f(x) = e^x$ por las abscisas $\{\frac{i}{n}, i = 0, \ldots, n\}$ es:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} e^{\frac{i}{n}} \frac{\prod_{j \neq i}(x - \frac{j}{n})}{\prod_{j \neq i}(\frac{i}{n} - \frac{j}{n})}.$$

c) Dado que $(e^x)' = e^x$, el Teorema de interpolación polinómica permite acotar la sucesión mediante $|E_n| \leq \frac{e}{(n+1)!}$. Luego, E_n es una sucesión acotada que tiende a 0.

d) Como E_n tiende a 0, la familia de polinomios $\{p_n(x)\}$ converge uniformemente a $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0, 1]$.